

# Mehanika

L. D. Landau in E. M. Lifšic  
Prevod: R. Žitko

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Enačbe gibanja</b>	<b>4</b>
1	Posplošene koordinate . . . . .	4
2	Načelo najmanjše akcije . . . . .	5
3	Galilejevo načelo relativnosti . . . . .	7
4	Lagrangeva funkcija prostega delca . . . . .	8
5	Lagrangeva funkcija sistema delcev . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Ohranitveni zakoni</b>	<b>15</b>
6	Energija . . . . .	15
7	Gibalna količina . . . . .	16
8	Težišče . . . . .	18
9	Vrtilna količina . . . . .	20
10	Mehanska podobnost . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Integriranje enačb gibanja</b>	<b>26</b>
11	Gibanje v eni dimenziji . . . . .	26
12	Določanje potencialne energije iz nihajnega časa . . . . .	28
13	Reducirana masa . . . . .	29
14	Gibanje v centralno simetričnem polju . . . . .	30
15	Keplerjev problem . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Trki med delci</b>	<b>41</b>
16	Razpad delcev . . . . .	41
17	Elastični trki . . . . .	44
18	Sipanje . . . . .	47
19	Rutherfordova formula . . . . .	52
20	Sipanje za majhen kot . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Majhna nihanja</b>	<b>56</b>
21	Prosto nihanje v eni dimenziji . . . . .	56
22	Vsiljeno nihanje . . . . .	59
23	Nihanje sistema z več prostostnimi stopnjami . . . . .	64
24	Nihanje molekul . . . . .	68
25	Dušeno nihanje . . . . .	72
26	Vsiljeno nihanje ob prisotnosti trenja . . . . .	75
27	Parametrična resonanca . . . . .	77
28	Neharmonično nihanje . . . . .	81

29	Resonanca pri nelinearnem nihanju . . . . .	84
30	Gibanje v hitro nihajočem polju . . . . .	88
<b>6</b>	<b>Gibanje togega telesa</b>	<b>91</b>
31	Kotna hitrost . . . . .	91
32	Vztrajnostni tenzor . . . . .	93
33	Vrtilna količina togega telesa . . . . .	101
34	Gibalne enačbe za togo telo . . . . .	103
35	Eulerjevi koti . . . . .	105
36	Eulerjeve enačbe . . . . .	109
37	Nesimetrična vrtavka . . . . .	110
38	Toga telesa, ki se dotikajo . . . . .	115
39	Gibanje v neinercialnem opazovalnem sistemu . . . . .	120
<b>7</b>	<b>Kanonske enačbe</b>	<b>124</b>
40	Hamiltonove enačbe . . . . .	124
41	Routhova funkcija . . . . .	126
42	Poissonovi oklepaji . . . . .	128
43	Akcija kot funkcija koordinat . . . . .	131
44	Maupertuisovo načelo . . . . .	133
45	Kanonske transformacije . . . . .	135
46	Liouvillov izrek . . . . .	138
47	Hamilton-Jacobijeve enačbe . . . . .	139
48	Separacija spremenljivk . . . . .	140
49	Adiabatne invariante . . . . .	145
50	Kanonske spremenljivke . . . . .	147
51	Natančnost ohranjanja adiabatne invariante . . . . .	149
52	Pogojno periodično gibanje . . . . .	152

# Poglavje 1

## Enačbe gibanja

### §1 Posplošene koordinate

Pojem *delca* je eden izmed osnovnih pojmov mehanike. *Delec* je telo, katerega razsežnost lahko zanemarimo pri opisu njegovega gibanja. To lahko storimo le, če obravnavana naloga dopušča takšno poenostavitev. Planete lahko, na primer, opišemo kot delce, kadar obravnavamo njihovo gibanje okoli Sonca, tega pa ne moremo storiti, kadar obravnavamo vrtenje okoli njihovih lastnih osi.

Položaj delca določimo z njegovim krajevnim vektorjem  $\mathbf{r}$ , katerega komponente so kartezične koordinate  $x$ ,  $y$  in  $z$ . Odvod  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  krajevnega vektorja  $\mathbf{r}$  po času  $t$  imenujemo *hitrost* delca, drugi odvod  $d^2\mathbf{r}/dt^2$  pa *pospešek* delca. Kot običajno bomo v nadaljevanju odvajanje po času označevali s piko nad simbolom, na primer  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ .

Položaje delcev v sistemu  $N$  delcev določimo z  $N$  krajevnimi vektorji, torej s  $3N$  koordinatami. Število neodvisnih količin, s katerimi enolično določimo položaje vseh delcev v sistemu, imenujemo število *prostostnih stopenj*. V našem primeru jih je  $3N$ . Te količine niso nujno kartezične koordinate delcev. V nekaterih nalogah je uporaba drugačnih koordinat bolj ustrezna. Poljubnih  $s$  količin  $q_1, q_2, \dots, q_s$ , ki popolnoma določijo položaje vseh delcev sistema z  $s$  prostostnimi stopnjami, imenujemo *posplošene koordinate* sistema, odvode teh količin  $\dot{q}_i$  pa imenujemo *posplošene hitrosti*.

Tudi če poznamo vrednosti vseh posplošenih koordinat, "mehansko stanje" sistema v danem trenutku še ni povsem določeno, da bi lahko predvideli položaje delcev ob kasnejšem času. Pri danih vrednostih koordinat so hitrosti še vedno poljubne, te pa vplivajo na položaj delcev po infinitezimalno kratkem času  $dt$ .

Če sočasno poznamo vse koordinate in hitrosti, potem iz izkušenj vemo, da je stanje sistema popolnoma določeno in da lahko njegovo gibanje vsaj načeloma izračunamo. V jeziku matematike to pomeni, da če poznamo koordinate  $q$  in hitrosti  $\dot{q}$  v danem trenutku, potem so enolično določeni tudi pospeški  $\ddot{q}$  v tem istem trenutku. \*

Povezava med pospeški, hitrostmi in koordinatami so *gibalne enačbe*. To so diferencialne enačbe drugega reda funkcij  $q(t)$ , ki jih vsaj načeloma lahko integriramo in tako določimo gibanje delcev.

---

\*Zaradi krajšega pisanja se bomo pogosto držali dogovora, da s  $q$  označujemo množico vseh koordinat  $q_1, q_2, \dots, q_s$ , s  $\dot{q}$  pa množico vseh hitrosti.

## §2 Načelo najmanjše akcije

Najbolj splošna formulacija zakona gibanja mehanskih sistemov je *načelo najmanjše akcije* ali *Hamiltonovo načelo*. Po tem načelu lahko vsak mehanski sistem opišemo z določeno funkcijo  $L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t)$ , ali krajše  $L(q, \dot{q}, t)$ , sistem pa se giblje tako, da je izpolnjen določen pogoj.

Ob časih  $t_1$  in  $t_2$  naj bo položaj sistema določen z dvema skupinama koordinat  $q^{(1)}$  in  $q^{(2)}$ . Teda j je iskani pogoj, da se sistem giblje med tema položajema tako, da je integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (2.1)$$

minimalen. \* Funkcijo  $L$  imenujemo *Lagrangeva funkcija* obravnavanega sistema, integral (2.1) pa imenujemo *akcija*.

Lagrangeva funkcija je odvisna le od  $q$  in  $\dot{q}$ , ne pa tudi od višjih odvodov  $\ddot{q}$ ,  $\ddot{\ddot{q}}$  itd. To je v skladu z ugotovitvijo, da je mehansko stanje sistema povsem določeno, če poznamo vrednosti vseh koordinat in hitrosti.

Poiščimo diferencialne enačbe, s katerimi rešimo nalogo minimizacije integrala (2.1). Za večjo nazornost bomo najprej predpostavili, da ima sistem eno samo prostostno stopnjo, tako da moramo določiti eno samo funkcijo  $q(t)$ .

Naj bo  $q = q(t)$  funkcija, za katero  $S$  doseže najmanjšo vrednost. To pomeni, da je  $S$  večji, če ga namesto s funkcijo  $q(t)$  izračunamo s funkcijo

$$q(t) + \delta q(t), \quad (2.2)$$

kjer je  $\delta q(t)$  funkcija, ki je majhna na celotnem časovnem intervalu od  $t_1$  do  $t_2$ . Funkcijo  $\delta q(t)$  imenujemo *variacija* funkcije  $q(t)$ . Ker morajo funkcije (2.2) ob časih  $t = t_1$  in  $t = t_2$  zavzeti vrednosti  $q^{(1)}$  oziroma  $q^{(2)}$ , sledi

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \quad (2.3)$$

Ko  $q$  nadomestimo z  $q + \delta q$  se  $S$  spremeni za

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt.$$

Če to razliko razvijemo po potencah  $\delta q$  in  $\delta \dot{q}$  pod integralom, so vodilni členi prvega reda. Če naj ima  $S$  minimum <sup>†</sup>, morajo biti ti členi (imenovani *prva variacija* ali samo *variacija* integrala) enaki nič. To je potreben pogoj. Načelo najmanjše akcije lahko torej zapišemo v obliki

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0, \quad (2.4)$$

ali, če variacijo dejansko izračunamo,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0.$$

\*Povedati moramo, da takšna formulacija načela najmanjše akcije ne velja vedno za celotno pot sistema, temveč le za zadosti kratke odseke. Integral (2.1) po celotni poti mora imeti ekstrem, ki pa ni nujno minimum. To pa ni pomembno pri izpeljevanju enačb gibanja, kjer upoštevamo le obstoj ekstrema.

<sup>†</sup>Ali, v splošnem, ekstrem.

Integriramo po delih in upoštevamo, da je  $\delta\dot{q} = d\delta q/dt$ . Dobimo

$$\delta S = \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0. \quad (2.5)$$

Zaradi pogojev (2.3) je prvič člen v (2.5) enak nič. Ostane le integral, ki mora biti enak nič za poljubno funkcijo  $\delta q$ . To je možno le, če je integrand identično enak nič. Sledi torej

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Če ima sistem več kot le eno prostostno stopnjo, moramo s različnih funkcij  $q_i(t)$  neodvisno variirati v skladu z načelom najmanjše akcije. Tako dobimo s enačb oblike

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (2.6)$$

To so iskane diferencialne enačbe, ki jih v mehaniki imenujemo *Lagrangeve enačbe*. \* Če je Lagrangeva funkcija za obravnavani mehanski sistem poznana, potem enačbe (2.6) izražajo povezavo med pospeški, hitrostmi in koordinatami. Lagrangeve enačbe so torej enačbe gibanja sistema.

Enačbe (2.6) tvorijo sistem s diferencialnih enačb drugega reda z  $s$  neznanimi funkcijami  $q_i(t)$ . Splošna rešitev vsebuje  $2s$  poljubnih konstant. Gibanje sistema lahko enolično določimo, če poiščemo te konstante, v ta namen pa moramo poznati začetne pogoje, ki opisujejo stanje sistema v nekem danem trenutku. To so lahko, na primer, začetne vrednosti koordinat in hitrosti.

Naj bo mehanski sistem sestavljen iz dveh delov,  $A$  in  $B$ , ki bi imela Lagrangevi funkciji  $L_A$  in  $L_B$ , če bi bila med seboj ločena. V limiti, ko postane razdalja med deloma tako velika, da lahko zanemarimo medsebojne interakcije, postane Lagrangeva funkcija celotnega sistema

$$\lim L = L_A + L_B. \quad (2.7)$$

Aditivnost Lagrangeve funkcije izraža dejstvo, da gibalne enačbe enega izmed dveh neinteragirajočih delov ne more vsebovati količin, ki se nanašajo na drugi del.

Očitno je, da množenje Lagrangeve funkcije mehanskega sistema s poljubno konstanto nima učinka na gibalne enačbe. Iz tega bi sledila – vsaj na prvi pogled – pomembna lastnost nedoločenosti: Lagrangeve funkcije različnih izoliranih mehanskih sistemov lahko pomnožimo z različnimi poljubnimi konstantami. Lastnost aditivnosti pa to nedoločenost odpravi, ker je dovoljeno le sočasno množenje Lagrangevih funkcij vseh sistemov z enako konstanto. Merska enota, s katero izražamo Lagrangevo funkcijo, je poljubna. O tem bo več govora v razdelku 4.

Omenimo še eno splošno lastnost. Imejmo dve funkciji  $L'(q, \dot{q}, t)$  in  $L(q, \dot{q}, t)$ , ki se razlikujeta za totalni odvod po času neke funkcije  $f(q, t)$  koordinat in časa:

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t). \quad (2.8)$$

Za integrale (2.1), izračunane s tema funkcijama, velja

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} dt = S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1),$$

---

\*V variacijskem računu jih imenujemo Eulerjeve enačbe za določanje ekstremov integrala oblike (2.1).

kar pomeni, da se razlikujeta za količino, katere variacija je enaka nič. Pogoja  $\delta S' = 0$  in  $\delta S = 0$  sta tedaj ekvivalentna in oblika gibalnih enačb se ne spremeni. Zato je Lagrangeva funkcija določena le do aditivnega totalnega odvoda po času poljubne funkcije koordinat in časa natančno.

### §3 Galilejevo načelo relativnosti

Pri obravnavi mehanskih pojavov si moramo izbrati *opazovalni sistem*. Zakoni gibanja so v splošnem različni v različnih opazovalnih sistemih. Če si izberemo čisto poljuben opazovalni sistem, se kaj lahko zgodi, da postanejo zelo kompleksni celo zakoni gibanja, ki opisujejo enostavne pojave. Zato je pomembno, da poiščemo opazovalni sistem, v katerem imajo zakoni mehanike najenostavnejšo možno obliko.

V poljubnem opazovalnem sistemu bi bil prostor nehomogen in anizotropen. Tudi če telo ne bi interagiralo z nobenim drugim telesom, različni položaji in usmerjenosti telesa v prostoru ne bi bili ekvivalentni. Nehomogen bi v splošnem bil tudi čas; različni trenutki ne bi bili ekvivalentni. Takšne lastnosti prostora in časa bi seveda otežile opis mehanskih pojavov. Prosto telo (torej telo, na katerega ne deluje nobena sila), na primer, ne bi moglo ostati na mestu: tudi če bi bila njegova hitrost v nekem trenutku enaka nič, bi se telo lahko v naslednjem trenutku začelo premikati.

Vemo pa, da lahko vedno najdemo opazovalni sistem, v katerem je prostor homogen in izotropen, čas pa homogen. Takšen opazovalni sistem se imenuje *inercialni opazovalni sistem*. V takšnem opazovalnem sistemu bi prosto telo, ki je ob nekem trenutku pri miru, za vedno ostalo pri miru.

Iz tega lahko izpeljemo nekaj sklepov o obliki Lagrangeve funkcije za prosto telo, ki se giblje v inercialnem opazovalnem sistemu. Iz homogenosti prostora in časa sledi, da Lagrangeva funkcija ne more eksplicitno vsebovati niti krajevnega vektorja  $\mathbf{r}$ , niti časa  $t$ , torej je funkcija  $L$  odvisna izključno od hitrosti  $\mathbf{v}$ . Ker je prostor izotropen, Lagrangeva funkcija ne more biti odvisna od smeri  $\mathbf{v}$ , temveč le od magnitude vektorja;  $L$  je torej funkcija spremenljivke  $v^2 = v^2$ :

$$L = L(v^2). \quad (3.1)$$

Ker Lagrangeva funkcija ni odvisna od  $\mathbf{r}$ , imamo  $\partial L / \partial \mathbf{r} = 0$ , Lagrangeva enačba pa se zapiše \*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) = 0.$$

Odvod  $\partial L / \partial \mathbf{v}$  je konstanten. Ker je  $\partial L / \partial \mathbf{v}$  funkcija izključno hitrosti, mora tedaj veljati

$$\mathbf{v} = \text{konstanta}. \quad (3.2)$$

Ugotovimo, da se v inercialnem opazovalnem sistemu prosto telo giblje s hitrostjo, ki je konstantna po velikosti in po smeri. To je *zakon inercialnega gibanja*.

Če si poleg inercialnega opazovalnega sistema zamislimo še opazovalni sistem, ki se enakomerno premočrtno giblje glede na inercialnega, potem se bo zakon o prostem gibanju v novem opazovalnem sistemu zapisal enako kot v starem: pri prostem gibanju je hitrost konstantna.

---

\*Odvod skalarne količine po vektorju  $\mathbf{a}$  je po definiciji vektor, katerega komponente so enake odvodom skalarja po ustreznih komponentah vektorja  $\mathbf{a}$ .

Poizkusi so pokazali ne le, da so zakoni gibanja enaki v obeh opazovalnih sistemih, temveč tudi, da sta oba opazovalna sistema povsem ekvivalentna z vseh vidikov mehanike. Obstaja torej neskončno veliko inercialnih opazovalnih sistemov, ki se gibljejo enakomerno premočrtno eden glede na drugega. V vseh teh opazovalnih sistemih imata prostor in čas enake lastnosti, enaki pa so tudi vsi zakoni mehanike. To je *Galilejevo načelo relativnosti*, eno izmed ključnih načel mehanike.

Inercialni opazovalni sistemi imajo posebne lastnosti, zaradi katerih jih skoraj vedno uporabljamo pri obravnavi mehanskih pojavov. V nadaljevanju bomo uporabljali izključno inercialne opazovalne sisteme, razen kadar bo eksplicitno govora o splošnih opazovalnih sistemih.

Popolna mehanska ekvivalentnost neskončnega števila inercialnih opazovalnih sistemov pomeni tudi, da ni "absolutnega" opazovalnega sistema, ki bi imel prednost pred ostalimi.

Koordinati  $\mathbf{r}$  in  $\mathbf{r}'$  dane točke v dveh različnih opazovalnih sistemih  $K$  in  $K'$ , kjer se drugi giblje s hitrostjo  $V$  glede na prvega, sta povezani z

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t. \quad (3.3)$$

Privzeli smo že, da je čas enak v obeh opazovalnih sistemih:

$$t = t'. \quad (3.4)$$

Privzetek, da je čas absoluten, je eden temeljev klasične mehanike. \*

Enačbi (3.3) in (3.4) imenujemo *Galilejeva transformacija*. Galilejevo načelo relativnosti lahko formuliramo s trditvijo, da so gibalne enačbe v mehaniki invariantne na Galilejeve transformacije.

## §4 Lagrangeva funkcija prostega delca

Sedaj bomo poiskali obliko Lagrangeve funkcije. Najprej si bomo ogledali najenostavnejši primer: prosti delec v inercialnem opazovalnem sistemu. Ugotovili smo že, da je Lagrangeva funkcija v tem primeru odvisna samo od kvadrata hitrosti. Odvisnost bomo poiskali s pomočjo Galilejevega načela relativnosti. Če se inercialni opazovalni sistem  $K$  premika z infinitezimalno hitrostjo  $\epsilon$  glede na drug inercialni opazovalni sistem  $K'$ , potem je  $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \epsilon$ . Ker morajo imeti gibalne enačbe enako obliko v vseh opazovalnih sistemih, mora ta transformacija spremeniti Lagrangevo funkcijo  $L(v^2)$  v funkcijo  $L'$ , ki se sme od  $L(v^2)$  razlikovati kvečjemu za totalni odvod funkcije koordinat in časa (glej konec 2).

Imamo  $L' = L(v'^2) = L(v^2 + 2\mathbf{v} \cdot \epsilon + \epsilon^2)$ . Izraz razvijemo po potencah  $\epsilon$  in obdržimo člene do prvega reda. Dobimo

$$L(v'^2) = L(v^2) + \frac{\partial L}{\partial v^2} 2\mathbf{v} \cdot \epsilon.$$

Drugi člen na desni strani enačbe je totalni odvod po času le v primeru, ko je linearna funkcija hitrosti  $\mathbf{v}$ . Zato mora biti  $\partial L / \partial v^2$  neodvisen od hitrosti. Z drugimi besedami, Lagrangeva funkcija je sorazmerna s kvadratom hitrosti. Zapišemo jo

$$L = \frac{1}{2}mv^2. \quad (4.1)$$

---

\*Ta privzetek ne velja več dobro v relativistični mehaniki.



Ker je Lagrangeva funkcija skladna z Galilejevim načelom relativnosti za infinitezimalno relativno hitrost, mora biti invariantna tudi za končno relativno hitrost  $\mathbf{V}$  med opazovalnima sistemoma  $K$  in  $K'$ . Res je

$$L' = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}m(\mathbf{v} + \mathbf{V})^2 = \frac{1}{2}mv^2 + m\mathbf{v} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2}mV^2,$$

ali

$$L' = L + d(m\mathbf{r} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2}mV^2t)/dt.$$

Drugi člen je totalni odvod po času in ga lahko zavržemo.

Količina  $m$ , ki se pojavlja v Lagrangevi funkciji (4.1) za prosti delec, se imenuje *masa* delca. Lastnost aditivnosti Lagrangevih funkcij nam da za sistem delcev, ki med seboj ne interagirajo, \*

$$L = \sum \frac{1}{2}m_a v_a^2. \quad (4.2)$$

Poudariti moramo, da ta način vpeljave mase dobi smisel le upoštevajoč lastnost aditivnosti. Kot omenjeno v 2, lahko Lagrangevo funkcijo vedno pomnožimo s poljubno konstanto, ne da bi s tem spremenili gibalne enačbe. Če s konstanto pomnožimo funkcijo (4.2), s tem samo spremenimo enoto za maso; razmerja mas različnih delcev se ne spremenijo in ravno razmerja mas imajo fizikalen pomen.

Hitro vidimo, da masa delca ne more biti negativna. Po načelu najmanjše akcije ima integral

$$S = \int_1^2 \frac{1}{2}mv^2 dt$$

minimum na dejanski poti delca v prostoru od točke 1 do točke 2. Če bi masa bila negativna, bi lahko bila akcija poljubno majhna pri gibanju, pri katerem bi delec hitro zapustil točko 1 in se hitro približal točki 2, in minimum ne bi obstajal. †

Vredno je omeniti, da je

$$v^2 = (dl/dt)^2 = (dl)^2/(dt)^2. \quad (4.3)$$

Ko iščemo zapis Lagrangeve funkcije v izbranem koordinatnem sistemu, zadostuje, da poiščemo kvadrat diferenciala ločne dolžine. V kartezičnih koordinatah je na primer  $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ , tako da je

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (4.4)$$

V cilindričnih koordinatah je  $dl^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2$  in dobimo

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2). \quad (4.5)$$

V sferičnih koordinatah je  $dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$  in dobimo

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta). \quad (4.6)$$

\*Indekse  $a, b, c, \dots$  bomo uporabljali za označevanje delcev, indekse  $i, k, l, \dots$  pa za označevanje koordinat.

†Na ta dokaz ne vpliva to, kar smo omenili v prvi opombi v § 2; če bi veljalo  $m < 0$ , integral ne bi imel minimuma niti na kratkih odsekih poti.

## §5 Lagrangeva funkcija sistema delcev

Obravnavajmo sistem delcev, ki interagirajo med seboj, ne pa tudi z drugimi telesi. Takšnemu sistemu reĉemo *izoliran* ali *zaprt sistem delcev*. IzkaŹe se, da lahko interakcijo med delci opiŹemo z dodatnim ĉlenom v Lagrangevi funkciji za neinteragirajoĉe delce (4.2). Dodatni ĉlen je funkcija koordinat delcev in je odvisen od vrste interakcije. \* Će oznaĉimo to funkcijo z  $-U$ , dobimo

$$L = \sum \frac{1}{2} m_a v_a^2 - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots), \quad (5.1)$$

kjer je  $\mathbf{r}_a$  krajevni vektor  $a$ -tega delca. To je sploŹna oblika Lagrangeve funkcije za izoliran sistem. Vsoto  $T = \sum \frac{1}{2} m_a v_a^2$  imenujemo *kinetiĉna energija*,  $U$  pa je *potencialna energija* sistema. Pomen teh imen bomo obrazloŹili v 6.

Dejstvo, da je potencialna energija odvisna samo od poloŹajev delcev ob danem trenutku, pomeni, da sprememba poloŹaja poljubnega delca takoj vpliva na ostale delce. Reĉemo lahko, da je interakcija hipna. Interakcije v klasiĉni mehaniki morajo biti hipne zaradi osnovnih predpostavk mehanike: absolutnosti ĉasa in Galilejevega naĉela relativnosti. Će bi se interakcije Źirile s konĉno hitrostjo, bi hitrosti bile razliĉne v razliĉnih opazovalnih sistemih, ki bi se gibali s konĉnimi hitrostmi eden glede na drugega. Vzrok tega je absolutnost ĉasa, zaradi katere obiĉajni zakon za seŹtevanje hitrosti velja za vse pojave. Sledilo bi, da bi bili zakoni gibanja interagirajoĉih teles razliĉni v razliĉnih inercialnih opazovalnih sistemih, to pa bi bilo v nasprotju z naĉelom relativnosti.

V razdelku 3 je bilo govora samo o homogenosti ĉasa. Oblika Lagrangeve funkcije (5.1) pa kaŹe, da je ĉas ne le homogen, temveĉ tudi izotropen. Lastnosti ĉasa so enake tako v smeri naprej, kot tudi v smeri nazaj v ĉasu. Će  $t$  nadomestimo z  $-t$ , Lagrangeva funkcija ostane enaka, prav tako pa tudi gibalne enaĉbe. Z drugimi besedami, ĉe je moŹno neko gibanje sistema, potem je moŹno tudi obratno gibanje, to je gibanje, pri katerem gre sistem skozi enaka stanja v obratnem vrstnem redu. V tem smislu so vsa gibanja, ki jih opisuje klasiĉna mehanika, reverzibilna.

Iz poznane Lagrangeve funkcije izpeljemo gibalne enaĉbe:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}. \quad (5.2)$$

Vstavimo (5.1) in dobimo

$$m_a d\mathbf{v}_a / dt = -\partial U / \partial \mathbf{r}_a. \quad (5.3)$$

Gibalne enaĉbe v tej obliki se imenujejo *Newtonove enaĉbe* in so osnova mehanike sistema interagirajoĉih delcev. Vektor

$$\mathbf{F} = -\partial U / \partial \mathbf{r}_a, \quad (5.4)$$

ki stoji na desni strani enaĉbe (5.3), se imenuje *sila* na  $a$ -ti delec. Tako kot  $U$  je tudi sila odvisna samo od poloŹajev delcev, ne pa tudi od njihovih hitrosti. Enaĉba (5.3) pove, da so vektorji pospeŹka odvisni samo od koordinat delcev.

Potencialna energija je doloĉena do aditivne konstante natanĉno. Ta konstanta nima uĉinka na gibalne enaĉbe. To je poseben primer ne-enoliĉnosti Lagrangeve funkcije, o ĉemer je bilo govora na koncu razdelka 2. Najbolj primerna in najbolj obiĉajna izbira te konstante je takŹna, da gre potencialna energija k 0, ko gredo razdalje med delci proti neskonĉnosti.

\*Ta trditev velja le v klasiĉni mehaniki. Relativistiĉne mehanike v tej knjigi ne obravnavamo.

Če za opis gibanja uporabimo poljubne posplošene koordinate  $q_i$  namesto kartezičnih, so potrebne naslednje transformacije, da dobimo novo Lagrangevo funkcijo:

$$x_a = f_a(q_1, q_2, \dots, q_s), \quad \dot{x}_a = \sum_k \frac{\partial f_a}{\partial q_k} \dot{q}_k, \quad \text{etc.}$$

Če vstavimo te izraze v funkcijo  $L = \frac{1}{2} \sum m_a (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U$ , dobimo Lagrangevo funkcijo oblike

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q), \quad (5.5)$$

kjer so funkcije  $a_{i,k}$  odvisne samo od koordinat. Kinetična energija, zapisana s posplošenimi koordinatami, je še vedno kvadratična funkcija hitrosti, vendar je sedaj lahko odvisna tudi od koordinat.

Do tu smo govorili o izoliranih sistemih. Oglejmo si sedaj sistem  $A$ , ki ni izoliran, in ki interagira s sistemom  $B$ , ki si giblje po neki dani poti. V takšnem primeru rečemo, da se sistem  $A$  giblje v danem zunanem polju (ki ga povzroča sistem  $B$ ). Ker dobimo gibalne enačbe s pomočjo načela najmanjše akcije tako, da neodvisno variiramo vsako koordinato (kot da bi ostale bile dane količine), lahko poiščemo Lagrangevo funkcijo  $L_A$  sistema  $A$  s pomočjo Lagrangeve funkcije  $L$  za celotni sistem  $A + B$ , koordinate  $q_B$  pa nadomestimo s podanimi funkcijami časa.

Pod predpostavko, da je sistem  $A + B$  izoliran, imamo  $L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B)$ . Prva člena sta kinetični energiji sistemov  $A$  in  $B$ , tretji člen pa je skupna potencialna energija. Če  $q_B$  nadomestimo s podanimi funkcijami časa in izpustimo člen  $T[q_B(t), \dot{q}_B(t)]$ , ki je odvisen samo od časa in je zato totalni odvod po času neke funkcije, dobimo  $L_A = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U[q_A, q_B(t)]$ . Gibanje sistema v zunanem polju zato opišemo z običajno Lagrangevo funkcijo z edino razliko, da je sedaj lahko potencialna energija eksplicitno odvisna od časa.

Ko se, na primer, en delec giblje v zunanem polju, je splošna oblika Lagrangeve funkcije

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - U(\mathbf{r}, t), \quad (5.6)$$

gibalna enačba pa je

$$m \dot{\mathbf{v}} = -\partial U / \partial \mathbf{r}. \quad (5.7)$$

Polje, ki ustvari isto silo  $\mathbf{F}$  na delec v vsaki točki polji, imenujemo *homogeno polje*. Potentialna energija takšnega polja je

$$U = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}. \quad (5.8)$$

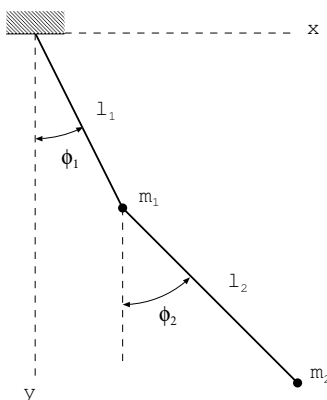
Za konec še pripomba o uporabi Lagrangevih enačb. Pogosto imamo opravka z mehanskimi sistemi, v katerih telesa med seboj interagirajo zaradi mehanskih vezi. Vezi so omejitve relativnih položajev delov sistema, ki jih dobimo zaradi uporabe drogov, žic, tečajev, zgibov itd. Med gibanjem teles prihaja v tem primeru do trenja na mestih, kjer se telesa dotikajo, in naloga v splošnem ne spada več izključno na področje mehanike (glej razdelek 25). Pogosto pa je trenje tako majhno, da ne vpliva na gibanje. Če so poleg tega mase sestavnih delov, ki omejujejo gibanje, zanemarljive, je edini učinek vezi to, da postane število prostostnih stopenj sistema manjše od  $3N$ . Gibanje telesa ponovno dobimo s pomočjo Lagrangeve funkcije (5.5),

če si izberemo natanko toliko neodvisnih posplošenih koordinat, kot je dejanskih prostostnih stopenj v sistemu.

### NALOGE

Poišči Lagrangeve funkcije za naslednje sisteme, ki se vsi nahajajo v težnostnem polju (pospešek  $g$ ).

NALOGA 1. Ravninsko dvojno nihalo (slika 1).



Slika 1:

*Rešitev:* Kot koordinati si izberemo kota  $\phi_1$  in  $\phi_2$ , pod katerima ležita vrvi dolžin  $l_1$  in  $l_2$  glede na navpično os. Za delec z maso  $m_1$  tedaj velja  $T_1 = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\phi}_1^2$ ,  $U = -m_1gl_1\cos\phi_1$ . Kinetično energijo drugega delca poiščemo tako, da izrazimo njegovi kartezični koordinati  $x_2$ ,  $y_2$  (izhodišče leži v točki, kjer je nihalo pripeto, os  $y$  pa je usmerjena navpično navzdol) s kotoma  $\phi_1$  in  $\phi_2$ :  $x_2 = l_1\sin\phi_1 + l_2\sin\phi_2$ ,  $y_2 = l_1\cos\phi_1 + l_2\cos\phi_2$ . Od tod dobimo

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\phi}_1^2 + l_2^2\dot{\phi}_2^2 + 2l_1l_2\cos(\phi_1 - \phi_2)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2]. \end{aligned}$$

Končno dobimo

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\phi}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\cos(\phi_1 - \phi_2) + (m_1 + m_2)gl_1\cos\phi_1 + m_2gl_2\cos\phi_2.$$

NALOGA 2. Preprosto nihalo z maso  $m_2$ , obešeno na maso  $m_1$ , ki se lahko giblje po vodoravni črti. Ta črta leži v isti ravnini, v kateri se giblje  $m_2$  (slika 2).

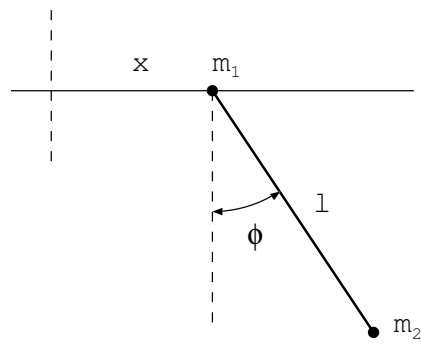
*Rešitev:* S koordinato  $x$  mase  $m_1$  in s kotom  $\phi$  med vrvi in navpično črto lahko zapišemo

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{\phi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi) + m_2gl\cos\phi.$$

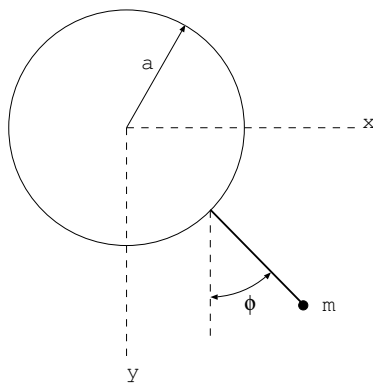
NALOGA 3. Preprosto nihalo z maso  $m$  s pritrdiščem, ki se (a) giblje enakomerno po navpičnem krogu s konstantno frekvenco  $\gamma$  (slika 3), (b) niha vodoravno v ravnini gibanja nihala po predpisu  $x = a\cos\gamma t$ , (c) niha navpično po predpisu  $y = a\cos\gamma t$ .

*Rešitev:* (a) Koordinati mase  $m$  sta  $x = a\cos\gamma t + l\sin\phi$ ,  $y = -a\sin\gamma t + l\cos\phi$ . Lagrangeva funkcija je

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + mla\gamma^2\sin(\phi - \gamma t)\dot{\phi} + mgl\cos\phi;$$



Slika 2:



Slika 3:

člene, ki so odvisni samo od časa, smo izpustili, prav tako tudi totalni časovni odvod količine  $m l a \gamma \cos(\phi - \gamma t)$ .

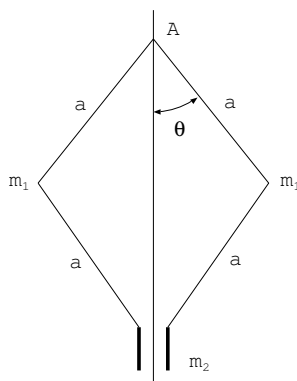
(b) Koordinati točke  $m$  sta  $x = a \cos \gamma t + l \sin \phi$  in  $y = l \cos \phi$ . Lagrangeva funkcija (iz katere smo izpustili totalne odvode) se glasi

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2 + m l a \gamma^2 \cos \gamma t \sin \phi + m g l \cos \phi.$$

(c) Podobno dobimo

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2 + m l a \gamma^2 \cos \gamma t \cos \phi + m g l \cos \phi.$$

NALOGA 4. Sistem, prikazan na sliki 4. Delec  $m_2$  se lahko premika po navpični osi, celotni sistem pa se vrti okoli te osi s konstantno kotno hitrostjo  $\Omega$ .



Slika 4:

*Rešitev:* Naj bo  $\theta$  kot med eno izmed palic  $a$  in navpičnico, kot  $\phi$  pa kot, za katerega je sistem zasukan okoli te iste osi;  $\dot{\phi} = \Omega$ . Za infinitezimalen premik vsakega delca  $m_1$  velja  $dl_1^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\phi^2$ . Razdalja od pritrdišča  $A$  do mase  $m_2$  je  $2a \cos \theta$ , od koder dobimo  $dl_2 = -2a \sin \theta d\theta$ . Lagrangeva funkcija sistema je

$$L = m_1 a^2 (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta) + 2m_2 a^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + 2(m_1 + m_2) g a \cos \theta.$$

## Poglavje 2

# Ohranitveni zakoni

### §6 Energija

Količine  $q_i$  in  $\dot{q}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ), ki določajo stanje sistema, se med gibanjem sistema spreminjajo s časom. Obstajajo pa funkcije teh količin, katerih vrednost se med gibanjem ne spreminjajo, in so odvisne le od začetnih pogojev. Takšne funkcije imenujemo *integrali gibanja*.

Število med seboj neodvisnih integralov gibanja izoliranega mehanskega sistema z  $s$  prostostnimi stopnjami je  $2s - 1$ . To lahko dokažemo na preprost način. Splošna rešitev enačb gibanja vsebuje  $2s$  prostih konstant (glej razpravo, ki sledi enačbi (2.6)). Ker gibalne enačbe izoliranega sistema ne vsebujejo časa eksplicitno, lahko izhodišče za merjenje časa izberemo poljubno, tako da si za eno izmed prostih konstant v rešitvi naloge izberemo aditivno konstanto  $t_0$  v času. Če izločimo  $t + t_0$  iz  $2s$  funkcij  $q_i = q_i(t + t_0, C_1, C_2, \dots, C_{2s-1})$  in  $\dot{q}_i = \dot{q}_i(t + t_0, C_1, C_2, \dots, C_{2s-1})$ , lahko  $2s - 1$  prostih konstant  $C_1, C_2, \dots, C_{2s-1}$  zapišemo kot funkcije spremenljivk  $q$  in  $\dot{q}$ , te funkcije pa so integrali gibanja, saj niso odvisne od časa.

Pomen integralov gibanja v mehaniki je raznolik. Konstantnost nekaterih ima globok pomen, saj izvira iz osnovnih lastnosti prostora in časa, homogenosti in izotropnosti. Količine, ki jih predstavljajo ti integrali gibanja, se *ohranjajo* in imajo pomembno lastnost aditivnosti. Ohranjene količine sistema, ki je sestavljen iz različnih delov, ki med seboj ne interagirajo, so vsote teh količin za posamezne dele.

Ohranjene količine igrajo posebno vlogo v mehaniki ravno zaradi aditivnosti. Naj dve telesi za kratek čas med seboj interagirata. Ker je vsak izmed aditivnih integralov gibanja celotnega sistema tako pred kot po interakciji enak vsoti vrednosti za vsako telo vzeto posebej, lahko pridemo do več splošnih zaključkov o stanju sistema po interakciji, če poznamo stanje pred interakcijo.

Najprej si oglejmo ohranitveni zakon, ki je posledica *homogenosti časa*. Zaradi homogenosti časa Lagrangeva funkcija izoliranega sistema ni eksplicitno odvisna od časa. Totalni časovni odvod Lagrangeve funkcije lahko zato zapišemo kot

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i.$$

Če bi bil  $L$  eksplicitno odvisen od časa, bi na desno stran enačbe morali dodati člen  $\partial L / \partial t$ .

Upoštevamo Lagrangeve enačbe in nadomestimo  $\partial L/\partial q_i$  z  $(d/dt)\partial L/\partial \dot{q}_i$ , pa dobimo

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \\ &= \sum_i \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)\end{aligned}$$

ali

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0.$$

Vidimo, da je količina

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \quad (6.1)$$

konstantna med gibanjem izoliranega sistema. To je integral gibanja, ki ga imenujemo *energija* sistema. Aditivnost energije je očitna posledica aditivnosti Lagrangeve funkcije, saj je iz enačbe (6.1) razvidno, da je energija linearna funkcija Lagrangeve funkcije.

Zakon o ohranitvi energije ne velja le za izolirane sisteme, temveč tudi za sisteme, ki se gibljejo v konstantnem zunanem polju (polju, ki ni odvisno od časa). Edina lastnost, ki smo jo v zgornji izpeljavi zahtevali od Lagrangeve funkcije, še vedno drži, saj funkcija ni eksplicitno odvisna od časa. Mehanske sisteme, katerih energija se ohranja, imenujemo tudi *konservativni* sistemi.

Kot smo videli v 5, ima Lagrangeva funkcija izoliranega sistema (ali sistema v konstantnem polju) obliko  $L = T(q, \dot{q}) - U(q)$ , kjer je  $T$  kvadratična funkcija hitrosti. Z uporabo Eulerjevega izreka o homogenih funkcijah dobimo

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T.$$

Če to vstavimo v (6.1), dobimo

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q); \quad (6.2)$$

ali v kartezičnih koordinatah,

$$E = \sum_a \frac{1}{2} m_a v_a^2 + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots). \quad (6.3)$$

Energijo sistema lahko torej zapišemo kot vsoto dveh dokaj različnih členov: kinetične energije, ki je odvisna od hitrosti, in potencialne energije, ki je odvisna samo od koordinat delcev.

## §7 Gibalna količina

Dodaten ohranitveni zakon velja zaradi homogenosti prostora. Zaradi homogenosti prostora so mehanske lastnosti izoliranega sistema nespremenjene, če celotni sistem vzporedno premaknemo v prostoru. Oglejmo si posledice infinitezimalnega premika  $\epsilon$  in zahteve, da se pri tem Lagrangeva funkcija ne spremeni.



Vzporedni premik je transformacija, pri kateri se položaj vsakega delca v sistemu spremeni enako, tako da krajevni vektor  $\mathbf{r}$  postane  $\mathbf{r} + \boldsymbol{\epsilon}$ . Sprememba  $L$  je posledica infinitezimalnih sprememb koordinat, hitrosti delcev pa ostanejo nespremenjene, zato je

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot \delta \mathbf{r}_a = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a},$$

kjer seštevamo po vseh delcih v sistemu. Ker je  $\boldsymbol{\epsilon}$  poljuben, je pogoj  $\delta L = 0$  ekvivalenten pogoju

$$\sum_a \partial L / \partial \mathbf{r}_a = 0. \quad (7.1)$$

Upoštevamo Lagrangeve enačbe (5.2) in dobimo

$$\sum_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = 0.$$

V izoliranem mehanskem sistemu je vektor

$$\mathbf{P} \equiv \sum_a \partial L / \partial \mathbf{v}_a \quad (7.2)$$

konstanten med gibanjem; imenujemo ga *gibalna količina* sistema. Odvajamo Lagrangevo funkcijo (5.1) in ugotovimo, kako se gibalna količina zapiše s hitrostmi delcev:

$$\mathbf{P} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a. \quad (7.3)$$

Aditivnost gibalne količine je očitna. Še več! Za razliko od energije je gibalna količina enaka vsoti vrednosti  $\mathbf{p}_a = m_a \mathbf{v}_a$  za posamezne delce, tudi če delci med seboj interagirajo.

V odsotnosti zunanega polja se ohranjajo vse tri komponente vektorja gibalne količine. Posamezne komponente pa so lahko ohranjajo tudi v polju, če potencialna energija polja ni odvisna od vseh kartezičnih koordinat. Mehanske lastnosti sistema se ne spremenijo ob premikih sistema vzdolž osi koordinate, ki ne nastopa v potencialni energiji, in ustrezna komponenta gibalne količine se ohranja. V homogenem polju vzdolž smeri  $z$  se, denimo, ohranjata komponenti  $x$  in  $y$  gibalne količine.

Enačba (7.1) ima preprost fizikalni pomen. Odvod  $\partial L / \partial \mathbf{r}_a = -\partial U / \partial \mathbf{r}_a$  je sila  $\mathbf{F}_a$ , ki deluje na  $a$ -ti delec. Zato enačba (7.1) pomeni, da je vsota sil na vse delce v izoliranem sistemu enaka nič:

$$\sum_a \mathbf{F}_a = 0. \quad (7.4)$$

Za dva delca dobimo  $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$ : sila, s katero deluje prvi delec na drugega, je obratna sili, s katero drugi delec deluje na prvega. To je *zakon o vzajemnem učinku* ali “*zakon o akciji in reakciji*” (Newtonov tretji zakon).

Če gibanje opisujemo s posplošenimi koordinatami  $q_i$ , se odvodi Lagrangeve funkcije po posplošenih hitrostih

$$p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i \quad (7.5)$$

imenujejo *posplošene gibalne količine*, odvodi Lagrangeve funkcije po posplošenih koordinatah

$$F_i = \partial L / \partial q_i \quad (7.6)$$

pa so *posplošene sile*. S temi oznakami lahko Lagrangeve enačbe zapišemo kot

$$\dot{p}_i = F_i. \quad (7.7)$$

V kartezičnih koordinatah so posplošene gibalne količine komponente vektorjev  $\mathbf{p}_a$ . V splošnem pa so  $p_i$  linearne homogene funkcije posplošenih hitrosti  $\dot{q}_i$  in jih ne moremo poenostaviti na produkte mase in hitrosti.

## NALOGA

NALOGA Delec z maso  $m$  se s hitrostjo  $\mathbf{v}_1$  giblje v pol-prostoru, kjer ima potencialno energijo  $U_1$ , nakar vstopi v drugo polovico prostora, v katerem je njegova potencialna energija enaka drugi konstanti  $U_2$ . Ugotovi, kako se spremeni smer gibanja delca.

*Rešitev:* Potencialna energija ni odvisna od koordinat, katerih osi so vzporedne z ravnino, ki ločuje obe polovici prostora. Komponenta gibalne količine, ki leži v tej ravnini, se torej ohrani. Kota med normalo na ravnino in smerema  $\mathbf{v}_1$  in  $\mathbf{v}_2$  delca pred in po prehodu skozi ravnino označimo z  $\theta_1$  in  $\theta_2$ . Velja  $v_1 \sin \theta_1 = v_2 \sin \theta_2$ . Zveza med  $v_1$  in  $v_2$  je določena z zakonom o ohranitvi energije, končni rezultat pa je

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \sqrt{\left[1 + \frac{2}{mv_1^2}(U_1 - U_2)\right]}.$$

## §8 Težišče

Gibalna količina izoliranega mehanskega sistema ima različne vrednosti v različnih (inercialnih) opazovalnih sistemih. Če se opazovalni sistem  $K'$  giblje s hitrostjo  $\mathbf{V}$  glede na opazovalni sistem  $K$ , potem se povezava med hitrostima delcev  $\mathbf{v}'_a$  in  $\mathbf{v}_a$  v obeh opazovalnih sistemih glasi  $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}$ . Povezava med gibalnima količinama  $\mathbf{P}$  in  $\mathbf{P}'$  v obeh opazovalnih sistemih pa je

$$\mathbf{P} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a = \sum_a m_a \mathbf{v}'_a + \mathbf{V} \sum_a m_a,$$

ali

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \mathbf{V} \sum_a m_a. \quad (8.1)$$

Vedno obstaja opazovalni sistem  $K'$ , v katerem je skupna gibalna količina enaka nič. Če v enačbi (8.1) postavimo  $\mathbf{P}' = 0$ , dobimo hitrost takšnega opazovalnega sistema:

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} / \sum_a m_a = \sum_a m_a \mathbf{v}_a / \sum_a m_a. \quad (8.2)$$

Če je skupna gibalna količina mehanskega sistema v izbranem opazovalnem sistemu enaka nič, potem rečemo, da sistem v tem opazovalnem sistemu *miruje*. Tako smo posplošili pojem mirovanja na sistem delcev. Podobno je hitrost  $\mathbf{V}$ , določena z enačbo (8.2), hitrost "skupnega premikanja" mehanskega sistema, katerega gibalna količina je od nič različna. Vidimo, da zakon o ohranitvi gibalne količine omogoča vpeljavo pojmov mirovanja in hitrosti tudi za celotni mehanski sistem.

Enačba (8.2) pove, da je povezava med gibalno količino  $\mathbf{P}$  in hitrostjo  $\mathbf{V}$  sistema takšna, kot povezava med gibalno količino in hitrostjo enega samega delca z maso  $\mu = \sum m_a$ , torej z vsoto mas vseh delcev. Ta rezultat izraža *aditivnost mas*.

Desno stran enačbe (8.2) lahko zapišemo kot totalni časovni odvod izraza

$$\mathbf{R} \equiv \sum m_a \mathbf{r}_a / \sum m_a. \quad (8.3)$$

Rečemo lahko, da je skupna hitrost sistema enaka hitrosti gibanja točke, katere krajevni vektor je  $\mathbf{R}$ . To točko imenujemo *težišče* sistema.

Zakon o ohranitvi gibalne količine za izoliran sistem lahko formuliramo tudi tako: težišče sistema se giblje enakomerno premočrtno. V tej obliki je zakon o ohranitvi gibalne količine posplošitev zakona inercije, opisanega v 3 za en sam delec, katerega težišče sovpada z delcem samim.

Mehanske lastnosti izoliranih sistemov je smiselno obravnavati v opazovalnih sistemih, v katerih težišče miruje. Tako iz naloge izločimo enakomerno premočrtno gibanje celotnega sistema, ki ni zanimivo.

Energijo mirujočega mehanskega sistema pogosto imenujemo *notranja energija*  $E_i$ . Sestavljena je iz kinetične energije medsebojnega gibanja delcev sistema in iz potencialne energije njihovih interakcij. Celotno energijo sistema, ki se giblje s skupno hitrostjo  $\mathbf{V}$  pa lahko zapišemo kot

$$E = \frac{1}{2} \mu V^2 + E_i. \quad (8.4)$$

Čeprav je ta rezultat dokaj očiten, bomo enačbo tudi neposredno izpeljali. Povezava med energijama  $E$  in  $E'$  mehanskega sistema v dveh opazovalnih sistemih  $K$  in  $K'$  je

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \sum_a m_a v_a^2 + U \\ &= \frac{1}{2} \sum_a m_a (\mathbf{v}'_a + \mathbf{V})^2 + U \\ &= \frac{1}{2} \mu V^2 + \mathbf{V} \cdot \sum_a m_a \mathbf{v}'_a + \frac{1}{2} \sum_a m_a v_a'^2 + U \\ &= E' + \mathbf{V} \cdot \mathbf{P}' + \frac{1}{2} \mu V^2. \end{aligned} \quad (8.5)$$

To je zakon o transformaciji energije iz enega v drugi opazovalni sistem, ki ustreza zakonu o transformaciji gibalne količine (8.1). Če težišče miruje v  $K'$ , potem je  $\mathbf{P}' = 0$ ,  $E' = E_i$  in dobimo enačbo (8.4).

## NALOGA

NALOGA Poišči zakon za transformacijo akcije  $S$  ob prehodu iz enega opazovalnega sistema v drugega.

*Rešitev:* Lagrangeva funkcija je enaka razliki med kinetično in potencialno energijo in se očitno pretvori po enačbi, podobni enačbi (8.5):

$$L = L' + \mathbf{V} \cdot \mathbf{P}' + \frac{1}{2} \mu V^2.$$

Ta izraz integriramo po času in dobimo iskani zakon za transformacijo akcije:

$$S = S' + \mu \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}' + \frac{1}{2} \mu V^2 t,$$

kjer je  $\mathbf{R}'$  krajevni vektor težišča v opazovalnem sistemu  $K'$ .

## §9 Vrtilna količina

Sedaj bomo izpeljali ohranitveni zakon, ki je posledica *izotropnosti prostora*. Izotropnost prostora pomeni, da se mehanske lastnosti sistema ne spremenijo, če celotni sistem zasukamo v prostoru na poljuben način. Oglejmo si infinitezimalni zasuk sistema in poiščimo, kakšen pogoj mora veljati, da se Lagrangeva funkcija ne spremeni.

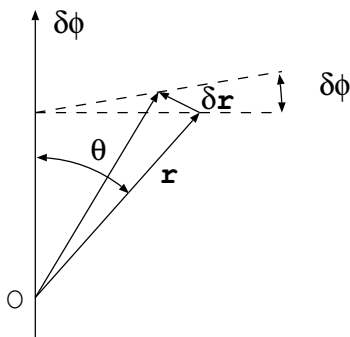
Sistem bomo zasukali za infinitezimalni vektor  $\delta\phi$ . Velikost vektorja je kot zasuka  $\delta\phi$ , smer vektorja pa je os vrtenja (sistem sukamo po pravilu desnega vijaka, ki ga zavijamo v smeri  $\delta\phi$ ).

Najprej poiščimo spremembo krajevnega vektorja (izhodišče mora ležati na osi vrtenja) poljubnega delca v sistemu. Linearni premik končne točke vektorja je  $|\delta\mathbf{r}| = r \sin\theta \delta\phi$ . Smer vektorja  $\delta\mathbf{r}$  je pravokotna na ravnino, ki jo razpenjata  $\mathbf{r}$  in  $\delta\phi$ . Od tod razberemo, da je

$$\delta\mathbf{r} = \delta\phi \times \mathbf{r}. \quad (9.1)$$

Ko sistem zasukamo, se ne spremenijo le krajevni vektorji, temveč tudi hitrosti delcev. Vsi vektorji se spremenijo po istem predpisu. Sprememba hitrosti glede na nepremični koordinatni sistem je

$$\delta\mathbf{v} = \delta\phi \times \mathbf{v}. \quad (9.2)$$



Slika 5:

Če ta izraza vstavimo v pogoj, da se Lagrangeva funkcija ob zasuku ne spremeni,

$$\delta L = \sum_a \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot \delta \mathbf{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \delta \mathbf{v}_a \right) = 0,$$

in če odvod  $\partial L / \partial \mathbf{v}_a$  zamenjamo z  $\mathbf{p}_a$ , odvod  $\partial L / \partial \mathbf{r}_a$  pa z  $\dot{\mathbf{p}}_a$ , je rezultat

$$\sum_a (\dot{\mathbf{p}}_a \cdot \delta\phi \times \mathbf{r}_a + \mathbf{p}_a \cdot \delta\phi \times \mathbf{v}_a) = 0.$$

Ko zamenjamo vrsti red faktorjev in izpostavimo  $\delta\phi$ , sledi

$$\delta\phi \cdot \sum_a (\mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{p}}_a + \mathbf{v}_a \times \mathbf{p}_a) = \delta\phi \cdot \frac{d}{dt} \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a = 0.$$

Ker je  $\delta\phi$  poljuben, mora veljati  $d/dt \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a = 0$ . Zaključimo, da se vektor

$$\mathbf{M} \equiv \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a, \quad (9.3)$$

imenovan *vrtilna količina* sistema, med gibanjem izoliranega sistema ohranja. Podobno kot gibalna količina je vrtilna količina aditivna in to neodvisno od tega, ali delci med seboj interagirajo ali ne.

Drugih aditivnih integralov gibanja ni. Vsak izoliran sistem ima sedem takšnih integralov: energijo, tri komponente gibalne količine in tri komponente vrtilne količine.

Ker definicija vrtilne količine vsebuje krajevni vektor delcev, je njena vrednost v splošnem odvisna od izbire izhodišča. Krajevna vektorja  $\mathbf{r}_a$  in  $\mathbf{r}'_a$  dane točke, merjena glede na različni izhodišči, ki sta ločeni za  $\mathbf{a}$ , sta povezana z relacijo  $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}'_a + \mathbf{a}$ . Torej je

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a \\ &= \sum_a \mathbf{r}'_a \times \mathbf{p}_a + \mathbf{a} \times \sum_a \mathbf{p}_a \\ &= \mathbf{M}' + \mathbf{a} \times \mathbf{P}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Iz te enačbe je razvidno, da je vrtilna količina odvisna od izbire izhodišča, razen tedaj, ko sistem kot celota miruje ( $\mathbf{P} = 0$ ). Ta nedoločenoost ni navzkriž z zakonom o ohranitvi vrtilne količine, saj se tudi celotna gibalna količina  $\mathbf{P}$  ohranja v izoliranem sistemu.

Izpeljemo lahko tudi povezavo med vrtilnima količinama v dveh opazovalnih sistemih  $K$  in  $K'$ , pri čemer se drugi giblje s hitrostjo  $\mathbf{V}$  glede na prvega. Predpostavili bomo, da izhodišči opazovalnih sistemov sovpadata ob izbranem trenutku. Tedaj so krajevni vektorji delcev enaki v obeh opazovalnih sistemih, povezava med hitrostima pa je  $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}$ . Velja torej

$$\mathbf{M} = \sum_a m_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a = \sum_a m_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}'_a + \sum_a m_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{V}.$$

Prva vsota na desni strani je vrtilna količina  $\mathbf{M}'$  v opazovalnem sistemu  $K'$ . V drugi vsoti upoštevamo definicijo krajevnega vektorja težišča (8.3) in dobimo

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + \mu \mathbf{R} \times \mathbf{V}. \quad (9.5)$$

Ta enačba podaja zakon o transformaciji vrtilne količine ob prehodu iz enega opazovalnega sistema v drugega. Podoben je zakonom o transformaciji gibalne količine (8.1) in energije (8.5).

Če v opazovalnem sistemu  $K'$  sistem delcev miruje, potem je  $\mathbf{V}$  hitrost težišča,  $\mu \mathbf{V}$  je skupna gibalna količina  $\mathbf{P}$  glede na  $K$ , in sledi

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + \mathbf{R} \times \mathbf{P}. \quad (9.6)$$

Z drugimi besedami, vrtilna količina  $\mathbf{M}$  mehanskega sistema ima dva prispevka: "lastno vrtilno količino" v opazovalnem sistemu, kjer miruje, in vrtilno količino  $\mathbf{R} \times \mathbf{P}$  zaradi gibanja sistema kot celote.

Čeprav zakon o ohranitvi vseh treh komponent vrtilne količine (glede na poljubno izbrano izhodišče) velja le za izolirane sisteme, včasih velja omejen ohranitveni zakon tudi za sistem v zunanjem polju. Iz zgornje izpeljave je očitno, da je komponenta vrtilne količine v smeri simetrijske osi polja vedno ohranjena, ker so mehanske lastnosti sistema nespremenjene ob zasukih sistema okoli takšne osi. Vrtilna količina mora seveda v tem primeru biti definirana glede na izhodišče, ki leži na simetrijski osi.

Najpomembnejši je primer *krogelno simetričnega polja*, pri katerem je potencialna energija odvisna samo od razdalje od neke točke (imenovane *središče*). Očitno je komponenta vrtilne količine v smeri katerekoli osi, ki gre skozi središče, ohranjena količina. Z drugimi besedami, vrtilna količina  $\mathbf{M}$  se ohranja, če je le definirana glede na izhodišče v središču polja.

Drug primer je homogeno polje v smeri osi  $z$ ; v takšnem polju je komponenta vrtilne količine  $M_z$  ohranjena ne glede na izbiro izhodišča.

Komponento vrtilne količine v smeri poljubne osi (na primer osi  $z$ ) lahko definiramo z odvodom Lagrangeve funkcije:

$$M_z = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_a}, \quad (9.7)$$

kjer je koordinata  $\phi$  kot zasuka okoli osi  $z$ . Definicija očitno sledi iz zgornjega dokaza zakona o ohranitvi vrtilne količine, lahko pa jo dokažemo tudi neposredno. V cilindričnih koordinatah  $r, \phi, z$  imamo (po substituciji  $x_a = r_a \cos \phi_a, y_a = r_a \sin \phi_a$ )

$$\begin{aligned} M_z &= \sum_a m_a (x_a \dot{y}_a - y_a \dot{x}_a) \\ &= \sum_a m_a r_a^2 \dot{\phi}_a. \end{aligned} \quad (9.8)$$

V cilindričnih koordinatah se Lagrangeva funkcija zapiše kot

$$L = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{r}_a^2 + r_a^2 \dot{\phi}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U,$$

in če vstavimo ta izraz v enačbo (9.7), dobimo enačbo (9.8).

## NALOGE

NALOGA 1. Poišči izraze za kartezične komponente in velikost vrtilne količine delca s cilindričnimi koordinatami  $r, \phi, z$ .

*Rešitev:*

$$\begin{aligned} M_x &= m(r\dot{z} - z\dot{r}) \sin \phi - mrz\dot{\phi} \cos \phi, \\ M_y &= -m(r\dot{z} - z\dot{r}) \cos \phi - mrz\dot{\phi} \sin \phi, \\ M_z &= mr^2\dot{\phi}, \\ M^2 &= m^2 r^2 \dot{\phi}^2 (r^2 + z^2) + m^2 (r\dot{z} - z\dot{r})^2. \end{aligned}$$

NALOGA 2. Kot v prvi nalogi, vendar za krogelne koordinate  $r, \theta, \phi$ .

Rešitev:

$$M_x = -mr^2(\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \theta \cos \phi),$$

$$M_y = mr^2(\dot{\theta} \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \theta \sin \phi),$$

$$M_z = mr^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta,$$

$$M^2 = m^2 r^4 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta).$$

NALOGA 3. Katere komponente gibalne količine  $\mathbf{P}$  in vrtilne količine  $\mathbf{M}$  se ohranjajo, če se delec giblje v naslednjih poljih?

- polje neskončne homogene plošče,
- polje neskončnega homogenega valja,
- polje neskončne homogene prizme,
- polje dveh točk,
- polje neskončne homogene polravnine,
- polje homogenega stožca,
- polje homogenega krožnega torusa,
- polje neskončne homogene valjaste vijačnice.

Rešitev:

- $P_x, P_y, M_z$  (če plošča leži v ravniniplota  $xy$ ),
- $M_z, P_z$  (če leži os valja v smeri osi  $z$ ),
- $P_z$  (če so stranice prizme vzporedne z osjo  $z$ ),
- $M_z$  (če leži daljica med točkama v smeri osi  $z$ ),
- $P_y$  (če je rob polravnine v smeri osi  $y$ ),
- $M_z$  (če je os stožca v smeri osi  $z$ ),
- $M_z$  (če je os torusa v smeri osi  $z$ ),
- Lagrangeva funkcija se ne spremeni ob zasuku za kot  $\delta\phi$  okoli osi vijačnice (ki naj sovпада z osjo  $z$ ) ob sočasnem vzporednem premikom za  $h\delta\phi/2\pi$  ( $h$  je korak vijačnice). Zato je  $\delta L = \delta z \partial L / \partial z + \delta \phi \partial L / \partial \phi = \delta \phi (h \dot{P}_z / 2\pi + \dot{M}_z) = 0$ , od koder sledi, da se ohranja količina  $M_z + hP_z/2\pi$ .

## §10 Mehanska podobnost

Če Lagrangevo funkcijo pomnožimo s poljubno konstanto, se gibalne enačbe ne spremenijo. To dejstvo, o katerem je bilo govora že v 2, omogoča, da v številnih pomembnih primerih pridemo do uporabnih ugotovitev o lastnostih gibanja, brez da bi gibalne enačbe dejansko integrirali.

Med tovrstne primere štejemo, na primer, tiste, pri katerih je potencialna energija homogena funkcija koordinat, ki izpolnjuje pogoj

$$U(\alpha \mathbf{r}_1, \alpha \mathbf{r}_2, \dots, \alpha \mathbf{r}_n) = \alpha^k U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n), \quad (10.1)$$

kjer je  $\alpha$  poljubna konstanta,  $k$  pa stopnja homogenosti funkcije.

Sedaj bomo izvedli transformacijo, pri kateri se koordinate spremenijo za faktor  $\alpha$ , čas pa za faktor  $\beta$ :  $\mathbf{r}_a \rightarrow \alpha \mathbf{r}_a$ ,  $t \rightarrow \beta t$ . Hitrosti  $\mathbf{v}_a = d\mathbf{r}_a/dt$  se ob tem spremenijo za faktor  $\alpha/\beta$ , kinetične energija pa za faktor  $\alpha^2/\beta^2$ . Potencialna energija se pomnoži z  $\alpha^k$ . Če za konstantni  $\alpha$  in  $\beta$  velja  $\alpha^2/\beta^2 = \alpha^k$ , oziroma  $\beta = \alpha^{1-\frac{1}{2}k}$ , potem je transformirana Lagrangeva funkcija pomnožena s konstantnim faktorjem  $\alpha^k$  in gibalne enačbe se ne spremenijo.

Sprememba koordinat delcev za enak faktor ustreza zamenjavi poti delcev z drugimi potmi, ki so prvim geometrijsko podobne, toda drugačne velikosti. Tako pridemo do sklepa, da pri mehanskih sistemih, v katerih je potencialna energija homogena funkcija stopnje  $k$  v (kartezičnih) koordinatah, gibalne enačbe dopuščajo skupine rešitev, ki imajo geometrijsko podobne poti, čas gibanja med ekvivalentnimi točkami pa je v razmerju

$$t'/t = (l'/l)^{1-\frac{1}{2}k}, \quad (10.2)$$

kjer je  $l'/l$  razmerje linearnih dimenzij na obeh poteh. Poleg časa so tudi vse ostale mehanske količine v ekvivalentnih točkah v razmerjih, ki so potence od  $l'/l$ . Za hitrosti, energije in vrtilne količine velja, denimo,

$$v'/v = (l'/l)^{\frac{1}{2}k}, \quad E'/E = (l'/l)^k, \quad M'/M = (l'/l)^{1+\frac{1}{2}k}. \quad (10.3)$$

Te ugotovitve bomo sedaj ponazorili na nekaj primerih.

Kot bomo videli kasneje, je pri *majhnih nihanjih* potencialna energija kvadratična funkcija koordinat ( $k = 2$ ). Iz enačbe (10.2) tedaj sledi, da je nihajni čas takšnih nihanj neodvisen od amplitude.

V homogenem polju je potencialna energija linearna funkcija koordinat [glej (5.8)], torej je  $k = 1$ . Iz enačbe (10.2) dobimo  $t'/t = \sqrt{l'/l}$ . Iz tega sledi, na primer, da je pri prostem padu pod vplivom težnosti trajanje padca sorazmerno s kvadratnim korenom začetne višine.

Pri Newtonovi gravitacijski privlaku dveh mas ali Coulombovi interakciji med dvema nabojevema je potencialna energija obratno sorazmerna z razdaljo med delcema, zato je to homogena funkcija stopnje  $k = -1$ . Potem je  $t'/t = (l'/l)^{3/2}$ , kar je *Keplerjev tretji zakon*: kvadrat časovne periode med kroženje po orbiti je sorazmeren s tretjo potenco velikosti orbite.

Če je potencialna energija homogena funkcija koordinat in je gibanje omejeno na končno območje prostora, obstaja enostavna povezava med časovnimi povprečji kinetične in potencialne energije, imenovana *virialni izrek*.

Ker je kinetična energija  $T$  kvadratična funkcija hitrosti, je po Eulerjevemu izreku o homogenih funkcijah  $\sum \mathbf{v}_a \cdot \partial T / \partial \mathbf{v}_a = 2T$ . Če upoštevamo še, da je  $\partial T / \partial \mathbf{v}_a = \mathbf{p}_a$ , kar je gibalna količina, dobimo

$$2T = \sum_a \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{v}_a = \frac{d}{dt} \left( \sum_a \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{r}_a \right) - \sum_a \mathbf{r}_a \cdot \dot{\mathbf{p}}_a. \quad (10.4)$$

Povprečimo to enačbo po času. Povprečna vrednosti poljubne funkcije časa  $f(t)$  je definirana z enačbo

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt.$$

Hitro se prepričamo, da je povprečna vrednost funkcije  $f(t)$  enaka nič, kadar je  $f(t)$  časovni odvod  $dF(t)/dt$  omejene funkcije  $F(t)$ :

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dF}{dt} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0.$$



Predpostavimo, da se sistem giblje v omejenem območju prostora s končnimi hitrostmi. Potem je  $\sum \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{r}_a$  omejena funkcija, in povprečna vrednost prvega člena na desni strani enačbe (10.4) je nič. Upoštevajoč Newtonove enačbe (5.3) v drugem členu v skladu zamenjamo  $\dot{\mathbf{p}}_a$  z  $-\partial U/\partial \mathbf{r}_a$  in dobimo \*

$$2\bar{T} = \overline{\sum_a \mathbf{r}_a \cdot \partial U / \partial \mathbf{r}_a}. \quad (10.5)$$

Če je potencialna energija homogena funkcija krajevnih vektorjev  $\mathbf{r}_a$  stopnje  $k$ , potem po Eulerjevem izreku iz enačbe (10.5) sledi virialni izrek:

$$2\bar{T} = k\bar{U}. \quad (10.6)$$

Ker je  $\bar{T} + \bar{U} = \bar{E} = E$ , lahko enačbo (10.6) zapišemo tudi v naslednjih oblikah:

$$\bar{U} = 2E/(k+2), \quad \bar{T} = kE/(k+2), \quad (10.7)$$

kjer smo povprečno potencialno energijo in povprečno kinetično energijo izrazili s celotno energijo sistema.

Pri majhnih nihanjih je  $k = 2$  in velja  $\bar{T} = \bar{U}$ , kar pomeni, da sta povprečni vrednosti potencialne in kinetične energije enaki. Pri Newtonovi interakciji je  $k = 1$  in velja  $2\bar{T} = -\bar{U}$  ali  $E = -\bar{T}$ , kar je skladno z dejstvom, da pri takšni interakciji gibanje poteka v omejenem območju prostora le tedaj, ko je celotna energija negativna (glej §15).

## NALOGE

NALOGA 1. Določi razmerje med trajanjem potovanja po isti poti dveh delcev z različnima masama, vendar z enako potencialno energijo.

Rešitev:  $t'/t = \sqrt{m'/m}$ .

NALOGA 2. Poišči razmerje med trajanjem potovanja po isti poti dveh delcev z enako maso, katerih potencialni energiji se razlikujeta za konstanten faktor.

Rešitev:  $t'/t = \sqrt{U/U'}$ .

---

\*Količino na desni strani (10.5) včasih imenujemo tudi *virialna funkcija* sistema.

## Poglavje 3

# Integriranje enačb gibanja

### §11 Gibanje v eni dimenziji

Gibanje sistema z eno samo prostostno stopnjo poteka v *eni dimenziji*. Pri nespremenljivih zunanjih pogojih se povsem splošna oblika Lagrangeve funkcije za takšen sistem glasi

$$L = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 - U(q), \quad (11.1)$$

kjer je  $a(q)$  neka funkcija posplošene koordinate  $q$ . V posebnem primeru, če je  $q$  kartezična koordinata (na primer  $x$ ), velja

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x). \quad (11.2)$$

Gibalne enačbe, ki ustrezajo tem Lagrangevim funkcijam, lahko formalno integriramo. Gibalnih enačb niti ne rabimo zapisati; izpeljavo lahko začnemo s prvim integralom gibanja, ki podaja zakon o ohranitvi energije. Za Lagrangevo funkcijo (11.2) velja na primer  $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E$ . To je diferencialna enačba prvega reda, ki jo lahko neposredno integriramo. Ker je  $dx/dt = \sqrt{2[E - U(x)]/m}$ , sledi

$$t = \sqrt{\frac{1}{2}m} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + \text{konstanta}. \quad (11.3)$$

Poljubni konstantni v rešitvi sta celotna energija  $E$  ter integracijska konstanta.

Ker je kinetična energija pozitivna količina, je celotna energija vedno večja od potencialne, zato lahko gibanje poteka le na območju prostora, kjer je  $U(x) < E$ . Naj ima, na primer, funkcija  $U(x)$  obliko, prikazano na sliki 6. Če na sliki narišemo vodoravno črto, ki predstavlja izbrano vrednost skupne energije, lahko takoj razberemo možna območja gibanja. V primeru na sliki 6 se lahko delec giblje samo na območju  $AB$  ali na območju, desno od točke  $C$ .

Točke, v katerih je potencialna energija enaka celotni energiji,

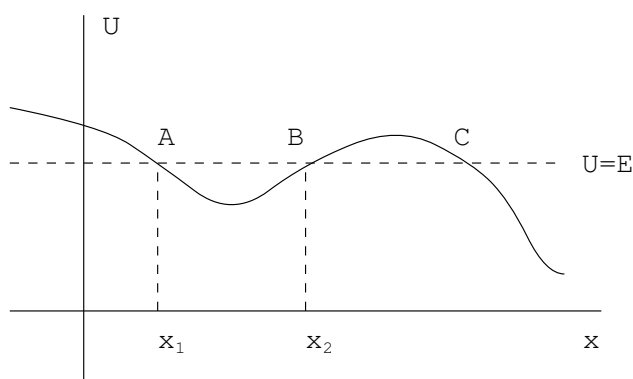
$$U(x) = E, \quad (11.4)$$

določajo meje gibanja. Imenujemo jih *obračališča*, ker je hitrost tam enaka nič. Če območje gibanja omejujeta dve takšni točki, potem se delec giblje v končnem območju prostora, takšno gibanje pa imenujemo *omejeno gibanje*. Če je območje omejeno na eni semi strani ali celo nikjer, potem je gibanje *neomejeno* in delec odpotuje v neskončnost.

Omejeno gibanje v eni dimenziji je nihanje: delec se giblje vedno znova med dvema točka (na sliki 6 v *potencialni jami AB* med točkama  $x_1$  in  $x_2$ ). Nihajni čas ali perioda nihanja (angl. *period*)  $T$  je čas, ki ga delec porabi na poti od  $x_1$  do  $x_2$  in nazaj. Nihajni čas je enak dvakratniku časa od  $x_1$  do  $x_2$  (zaradi reverzibilnosti, glej 5), zato iz (11.3) sledi

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \quad (11.5)$$

kjer sta  $x_1$  in  $x_2$  korena enačbe (11.4) pri dani vrednosti  $E$ . Enačba torej podaja nihajni čas v odvisnosti od celotne energije delca.



Slika 6:

## NALOGE

NALOGA 1. Izračunaj nihajni čas matematičnega nihala (delca z maso  $m$ , ki visi na nitki dolžine  $l$  v gravitacijskem polju) v odvisnosti od amplitude nihanja.

Rešitev: Energija nihala je  $E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 - mgl \cos \phi = -mgl \cos \phi_0$ , kjer je  $\phi$  kot med nitko in navpičnico,  $\phi_0$  pa je največja vrednost kota  $\phi$ . Nihajni čas je čas potovanja nihala od  $\phi = 0$  do  $\phi = \phi_0$  pomnožen s štiri. Dobimo

$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}} \\ &= 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\sin^2 \frac{1}{2}\phi_0 - \sin^2 \frac{1}{2}\phi}}. \end{aligned}$$

Z zamenjavo  $\sin \xi = \sin \frac{1}{2}\phi / \sin \frac{1}{2}\phi_0$  dobimo  $T = 4\sqrt{l/g}K(\sin \frac{1}{2}\phi_0)$ , kjer je

$$K(k) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}$$

popolni eliptični integral prve vrste. Če je  $\sin \frac{1}{2}\phi_0 \approx \frac{1}{2}\phi_0 \ll 1$  (majhno nihanje), lahko funkcijo  $K$  razvijemo in dobimo

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}\left(1 + \frac{1}{16}\phi_0^2 + \dots\right).$$

Prvi člen razvoja ustreza dobro poznanemu rezultatu za majhna nihanja.

NALOGA 2. Določi nihajni čas v odvisnosti od energije za delec z maso  $m$ , ki se giblje v polju, katerega potencialna energija je

$$(a) U = A|x|^n, \quad (b) U = -U_0/\cosh^2 \alpha x, \quad -U_0 < E < 0, \quad (c) U = U_0 \tan^2 \alpha x.$$

Rešitev:

(a)

$$\begin{aligned} T &= 2\sqrt{2m} \int_0^{(E/A)^{1/n}} \frac{dx}{\sqrt{E - Ax^n}} \\ &= 2\sqrt{\frac{2m}{E}} \left(\frac{E}{A}\right)^{1/n} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^n}}. \end{aligned}$$

Z zamenjavo  $y^n = u$  lahko integral izrazimo s funkcijo beta, ki se jo da zapisati tudi s funkcijami gama:

$$T = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{2\pi m}{E}} \left(\frac{E}{A}\right)^{1/n} \frac{\Gamma(1/n)}{\Gamma(\frac{1}{2} + 1/n)}.$$

Odvisnost nihajnega časa  $T$  od energije  $E$  je v skladu z zakonom o mehanski podobnosti iz enačbe (10.2) in (10.3).

$$(b) T = \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{|E|}}.$$

$$(c) T = \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{E+U_0}}.$$

## §12 Določanje potencialne energije iz nihajnega časa

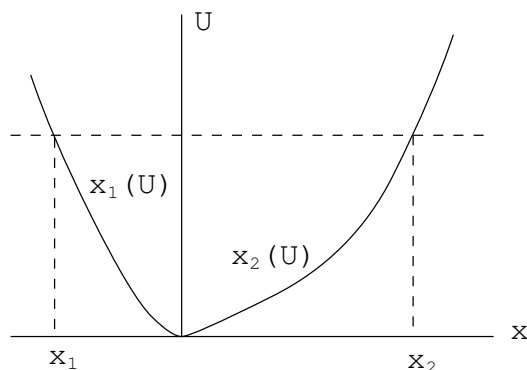
Oglejmo si, kaj lahko izvemo o potencialni energiji  $U(x)$  polja, v katerem delec niha, če poznamo nihajni čas kot funkcijo energije  $E$ . Bolj matematično: rešili bi radi integralno enačbo (11.5), v kateri je  $U(x)$  neznanka, poznamo pa  $T(E)$ .

Privzeli bomo, da ima iskana funkcija  $U(x)$  en sam minimum na obravnavanem območju prostora. Z vprašanjem, če obstajajo tudi druge rešitve, se ne bomo ukvarjali. Zaradi enostavnosti si izberemo izhodišče koordinatne osi v točki minimuma, pri minimalni energiji pa postavimo tudi ničlo energije (slika 7).

V integralu (11.5) obravnavamo koordinato  $x$  kot funkcijo  $U$ . Funkcija  $x(U)$  je dvolična: vsaki vrednosti potencialne energije ustrežata dve različni vrednosti  $x$ . Zato moramo integral (11.5) razbiti na dve območji preden  $dx$  zamenjamo z  $(dx/dU)dU$ : eno območje od  $x = x_1$  do  $x = 0$ , drugo od  $x = 0$  do  $x = x_2$ . Funkcijo  $x(U)$  na teh območjih bomo označevali z  $x = x_1(U)$  oziroma  $x = x_2(U)$ .

Integracijske meje za spremenljivko  $U$  so očitno  $E$  in  $0$ , tako da je

$$\begin{aligned} T(E) &= \sqrt{2m} \int_0^E \frac{dx_2(U)}{dU} \frac{dU}{\sqrt{E-U}} + \sqrt{2m} \int_E^0 \frac{dx_1(U)}{dU} \frac{dU}{\sqrt{E-U}} \\ &= \sqrt{2m} \int_0^E \left[ \frac{dx_2}{dU} - \frac{dx_1}{dU} \right] \frac{dU}{\sqrt{E-U}}. \end{aligned}$$



Slika 7:

Obe strani enačbe delimo z  $\sqrt{\alpha - E}$ , kjer je  $\alpha$  parameter, in integriramo po spremenljivki  $E$  od 0 do  $\alpha$ . Dobimo

$$\int_0^\alpha \frac{T(E) dE}{\sqrt{\alpha - E}} = \sqrt{2m} \int_0^\alpha \int_0^E \left[ \frac{dx_2}{dU} - \frac{dx_1}{dU} \right] \frac{dU dE}{\sqrt{(\alpha - E)(E - U)}},$$

z zamenjavo vrstnega reda integriranja pa

$$\int_0^\alpha \frac{T(E) dE}{\sqrt{\alpha - E}} = \sqrt{2m} \int_0^\alpha \left[ \frac{dx_2}{dU} - \frac{dx_1}{dU} \right] dU \int_U^\alpha \frac{dE}{\sqrt{(\alpha - E)(E - U)}}.$$

Integral po  $E$  je elementaren; njegova vrednost je  $\pi$ . Integral po  $U$  je zato trivialen, in sledi

$$\int_0^\alpha \frac{T(E) dE}{\sqrt{\alpha - E}} = \pi \sqrt{2m} [x_2(\alpha) - x_1(\alpha)],$$

ker je  $x_2(0) = x_1(0) = 0$ . Namesto  $\alpha$  pišemo  $U$  in dobimo končni rezultat:

$$x_2(U) - x_1(U) = \frac{1}{\pi \sqrt{2m}} \int_0^U \frac{T(E) dE}{\sqrt{U - E}}. \quad (12.1)$$

Iz poznane funkcije  $T(E)$  lahko torej izračunamo razliko  $x_2(U) - x_1(U)$ . Funkciji  $x_2(U)$  in  $x_1(U)$  pa ostaneta neznani. To pomeni, da ne obstaja le ena sama temveč neskončno krivulj  $U = U(x)$ , ki dajo enako odvisnost nihajnega časa od energije. Krivulje so takšne, da je razlika vrednosti koordinat  $x$ , ki ustrezata izbrani vrednosti  $U$ , enaka za vse krivulje.

Nedoločeno odpravimo, če zahtevamo, da naj bo krivulja  $U = U(x)$  simetrična glede na os  $U$ : tedaj je  $x_2(U) = -x_1(U) \equiv x(U)$ . Sedaj je  $x(U)$  enolično določen z enačbo (12.1):

$$x(U) = \frac{1}{2\pi \sqrt{2m}} \int_0^U \frac{T(E) dE}{\sqrt{U - E}}. \quad (12.2)$$

### §13 Reducirana masa

Povsem splošno rešitev lahko poiščemo za izjemno pomembno primer gibanja sistema dveh interagirajočih delcev (to je *problem dveh teles*).

Prvi korak na poti do rešitve je velika poenostavitev naloge z ločitvijo na gibanje težišča in na relativno gibanje obeh delcev glede na težišče.

Potencialna energija interakcije med dvema delcema je odvisna le od razdalje med njima, torej od velikosti razlike njunih krajevnih vektorjev. Lagrangeva funkcija takšnega sistema je zato

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \quad (13.1)$$

Naj bo  $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  vektor relativne lege, izhodišče koordinatnega sistema pa postavimo v težišče, tako da je  $m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0$ . Iz obeh enačb razberemo, da je

$$\mathbf{r}_1 = m_2\mathbf{r}/(m_1 + m_2), \quad \mathbf{r}_2 = -m_1\mathbf{r}/(m_1 + m_2). \quad (13.2)$$

To vstavimo v (13.1) in dobimo

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r). \quad (13.3)$$

Količina

$$m = m_1m_2/(m_1 + m_2) \quad (13.4)$$

se imenuje *reducirana masa*. Funkcija (13.3) je formalno enaka Lagrangevi funkciji za delec z maso  $m$ , ki se giblje v zunanjem polju  $U(r)$ , ki je simetrično okoli izhodišča.

Zato je gibanje dveh interagirajočih teles ekvivalentno gibanju enega delca v danem zunanjem potencialu  $U(r)$ . Iz rešitve  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  te naloge dobimo poti delcev  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$  in  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$  glede na njuno težišče iz enačb (13.2).

## NALOGA

NALOGA Sistem je sestavljen iz enega delca z maso  $M$  in iz  $n$  delcev z enako maso  $m$ . Iz naloge izločite gibanje težišča in nalogo poenostavite na problem  $n$  teles.

Rešitev: Naj bo  $\mathbf{R}$  krajevni vektor delca z maso  $M$ ,  $\mathbf{R}_a$  ( $a = 1, 2, \dots, n$ ) pa naj bodo krajevni vektorji delcev z maso  $m$ . Vpeljemo  $\mathbf{r}_a \equiv \mathbf{R}_a - \mathbf{R}$  in izhodišče postavimo v težišče:  $M\mathbf{R} + m \sum \mathbf{R}_a = 0$ . Od tod sledi  $\mathbf{R} = -(m/\mu) \sum \mathbf{r}_a$ , kjer je  $\mu \equiv M + nm$ ;  $\mathbf{R}_a = \mathbf{R} + \mathbf{r}_a$ . To vstavimo v Lagrangevo funkcijo  $L = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}m \sum \dot{\mathbf{R}}_a^2 - U$  in dobimo

$$L = \frac{1}{2}m \sum_a \mathbf{v}_a^2 - \frac{1}{2}(m^2/\mu) \left( \sum_a \mathbf{v}_a \right)^2 - U, \quad \text{kjer je } \mathbf{v}_a \equiv \dot{\mathbf{r}}_a.$$

Potencialna energija je odvisna le od razdalj med delci, zato jo lahko zapišemo kot funkcijo spremenljivk  $\mathbf{r}_a$ .

## §14 Gibanje v centralno simetričnem polju

Po poenostavitvi problema dveh teles na gibanje enega telesa moramo rešiti nalogo gibanja enega delca v zunanjem polju, katerega potencialna energija je odvisna samo od razdalje  $r$  od neke točke. Takšno polje imenujemo *centralno simetrično* polje. Sila, ki deluje na delec, je  $\mathbf{F} = -\partial U(r)/\partial \mathbf{r} = -(dU/dr)\mathbf{r}/r$ ; jakost sile je odvisna samo od  $r$ , kaže pa v smeri krajevnega vektorja.

Kot smo videli v 9, se vrtilna količina sistema delcev v centralno simetričnem polju, izračunana glede na središče polja, ohranja. Vrtilna količina enega delca je  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ . Ker je  $\mathbf{M}$  pravokoten na  $\mathbf{r}$ , ohranjanje vrtilne količine pomeni, da krajevni vektor delca ves čas leži v ravnini, pravokotni na  $\mathbf{M}$ .

Zato pot delca v centralno simetričnem polju leži v ravnini. Vpeljimo polarne koordinate  $r, \phi$  v tej ravnini. Lagrangeovo funkcijo lahko zapišemo

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r); \quad (14.1)$$

glej (4.5). Funkcija koordinate  $\phi$  ne vsebuje eksplicitno. Posplošena koordinata  $q_i$ , ki v Lagrangevi funkciji ne nastopa eksplicitno, se imenuje *ciklična* koordinata. Za ciklično koordinato velja  $(d/dt)\partial L/\partial \dot{q}_i = \partial L/\partial q_i = 0$  in ustrezna posplošena gibalna količina  $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$  je integral gibanja. Obstoj cikličnih koordinat torej omogoča občutno poenostavitev integracije gibalnih enačb.

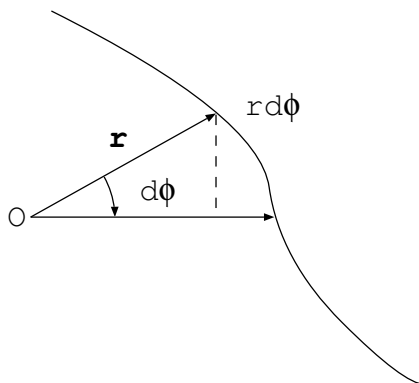
V našem primeru je posplošena gibalna količina  $p_\phi = mr^2\dot{\phi}$  enaka vrtilni količini  $M_z = M$ , glej (9.8), in dobimo poznani zakon o ohranitvi vrtilne količine:

$$M = mr^2\dot{\phi} = \text{konstanta}. \quad (14.2)$$

Ohranitveni zakon ima preprost geometrijski pomen pri ravninskemu gibanju enega delca v centralno simetričnem polju. Izraz  $\frac{1}{2}r \cdot r d\phi$  je diferencialna ploščina območja, omejenega z dvema sosednjima krajevnima vektorjema in diferencialnim odsekom poti (slika 8). Diferencialno ploščino označimo z  $df$ . Vrtilno količino delca lahko zapišemo kot

$$M = 2mf\dot{\phi}. \quad (14.3)$$

Odvod  $f\dot{\phi}$  se imenuje *ploščinska hitrost* (angl. *sectorial velocity*). Ker se vrtilna količina ohranja, je ploščinska hitrost konstantna: v enakem času krajevni vektor delca oriše enako ploščino. To je *Keplerjev drugi zakon*.



Slika 8:

Gibanja delca v centralno simetričnem polju lahko določimo, ne da bi zapisali gibalne enačbe. Zadostujeta zakona o ohranitvi energije in vrtilne količine. Iz enačbe (14.2) izrazimo  $\dot{\phi}$  kot funkcijo  $M$  in to vstavimo v enačbo za energijo. Tako dobimo

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}M^2/mr^2 + U(r). \quad (14.4)$$

Zato je

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\left\{ \frac{2}{m} [E - U(r)] \right\} - \frac{M^2}{m^2 r^2}}, \quad (14.5)$$

po integraciji pa sledi

$$t = \int dr / \sqrt{\left\{ \frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2} \right\}} + \text{konstanta}. \quad (14.6)$$

Enačbo (14.2) zapišemo v obliki  $d\phi = M dt/mr^2$ , vstavimo  $dt$  iz enačbe (14.5) in integriramo. Dobimo

$$\phi = \int \frac{M dr/r^2}{\sqrt{2m[E - U(r)] - M^2/r^2}} + \text{konstanta}. \quad (14.7)$$

Enačbi (14.6) in (14.7) podajata splošno rešitev naloge. Zadnja enačba je relacija med  $r$  in  $\phi$ , torej enačba poti. Enačba (14.6) pa podaja razdaljo  $r$  od središča kot implicitno funkcijo časa. Naj opozorimo na dejstvo, da kot  $\phi$  narašča monotono s časom, saj je iz enačbe (14.2) razvidno, da  $\dot{\phi}$  ne more spremeniti predznaka.

Izraz (14.4) omogoča, da obravnavamo radialno gibanje kot gibanje v eni dimenziji, pri čemer je "efektivna potencialna energija" enaka

$$U_{\text{eff}} = U(r) + M^2/2mr^2. \quad (14.8)$$

Količina  $M^2/2mr^2$  se imenuje *centrifugalna energija*. Vrednosti  $r$ , pri katerih velja

$$U(r) + M^2/2mr^2 = E, \quad (14.9)$$

določajo mejne vrednosti radialne razdalje od središča. Ko je enačba (14.9) izpolnjena, je radialna hitrost  $\dot{r}$  enaka nič. To ne pomeni, da se delec povsem ustavi, kot pri pravem radialnem gibanju, ker je kotna hitrost  $\dot{\phi}$  različna od nič. Enačba  $\dot{r} = 0$  pomeni, da gre za *obračališče* na poti, kjer začne  $r(t)$  upadati namesto naraščati ali obratno. Če je  $r$  omejen samo s pogojem  $r \geq r_{\min}$ , je gibanje neskončno: delec pripotuje iz neskončnosti in odpotuje v neskončnost.

Če ima  $r$  dve mejni vrednosti,  $r_{\min}$  in  $r_{\max}$ , je gibanje končno in tir v celoti leži v notranjosti prstana, ki ga omejujeta kroga  $r = r_{\max}$  in  $r = r_{\min}$ . To pa ne pomeni nujno, da je pot zaključena. V času, ko se  $r$  spremeni od  $r_{\min}$  do  $r_{\max}$  in nazaj, se krajevni vektor obrne za kot  $\Delta\phi$ , ki ga dobimo iz enačbe (14.7):

$$\Delta\phi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{M dr/r^2}{\sqrt{2m(E - U) - M^2/r^2}}. \quad (14.10)$$

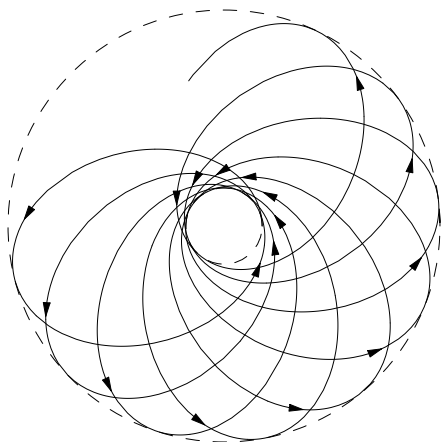
Pot je lahko zaključena, če je ta kot racionalni večkratnik števila  $2\pi$ , torej  $\Delta\phi = 2\pi m/n$ , kjer sta  $m$  in  $n$  celi števili. V tem primeru bo po  $n$  periodah krajevni vektor  $m$  krat popolnoma obkrožil središče, se vrnil v svojo začetno lego in tako zaključil pot.

To so le posebni primeri. Za splošen potencial  $U(r)$  kot  $\Delta\phi$  ne bo racionalni večkratnik  $2\pi$ . V splošnem zato pot delca z omejenim gibanjem ne bo sklenjena. Delec bo neskončnokrat dosegel minimalno in maksimalno oddaljenost od središča in po neskončno dolgem času bo njegova pot prekrila celoten prstan med mejnima krogoma. Primer takšnega tira je na sliki (9).



Obstajata le dve vrsti centralno simetričnega polja, v katerem se delci vedno gibljejo po zaključenih tirih. To sta polji, katerih potencialna energija je sorazmerna z  $1/r$  ali z  $r^2$ . Prvi primer bomo obravnavali v 15; drugi primer pa se imenuje *prostorsko nihalo*.

Kvadratni koren v (14.5) in zato tudi integranda v (14.6) in (14.7) spremenijo predznak v obračališču. Če kot  $\phi$  merimo glede na smer krajevnega vektorja, ki kaže v obračališče, potem se dela poti na vsaki strani te točke razlikujeta le za predznak količine  $\phi$  pri vsaki vrednosti  $r$ , zato je pot simetrična glede na  $\phi = 0$ . Če se gibanje, na primer, začne pri  $r = r_{\max}$ , delec prepotuje del poti do točke, kjer je  $r = r_{\min}$ , nato pa nadaljuje pot po simetričnem tiru do naslednje točke, kjer je  $r = r_{\max}$ , in tako naprej. Celoten tir gibanja dobimo s ponavljanjem enakih kosov poti sem in tja. To velja tudi za neskončne tiri, ki so sestavljeni iz dveh simetričnih vej, ki segata od obračališča ( $r = r_{\min}$ ) do neskončnosti.



Slika 9:

Ko je  $M \neq 0$ , prisotnost centrifugalne energije, ki postane neskončna, ko  $r \rightarrow 0$ , običajno delcu onemogoča, da bi padel v središče polja, tudi če je polje privlačno. Delec lahko pade v središče le tedaj, ko gre potencialna energija dovolj hitro proti  $-\infty$ , ko  $r \rightarrow 0$ . Iz neenačbe

$$\frac{1}{2}mr^2 = E - U(r) - M^2/2mr^2 > 0,$$

ali  $r^2U(r) + M^2/2m < Er^2$  sledi, da lahko  $r$  doseže  $r \rightarrow 0$ , samo če velja

$$[r^2U(r)]_{r \rightarrow 0} < -M^2/2m, \quad (14.11)$$

torej mora  $U(r)$  težiti k  $-\infty$  kot  $-\alpha/r^2$  z  $\alpha > M^2/2m$ , ali pa kot  $-1/r^n$  z  $n > 2$ .

## NALOGE

NALOGA 1. Integriraj gibalno enačbo za *krogelno nihalo* (delec z maso  $m$ , ki se giblje na površini krogle s polmerom  $l$  v gravitacijskem polju).

*Rešitev:* V krogelnih koordinatah z izhodiščem v središču krogle (polarna os kaže navzdol), se Lagrangeva funkcija nihala glasi

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + mgl \cos \theta.$$

Koordinata  $\phi$  je ciklična, zato se posplošena gibalna količina  $p_\phi$  (ki je enaka komponenti vrtilne količine v smeri osi  $z$ ) ohranja:

$$ml^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta = M_z = \text{konst.} \quad (1)$$

Energija je

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - mgl \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M_z^2 / ml^2 \sin^2 \theta - mgl \cos \theta. \end{aligned} \quad (2)$$

Od tod sledi

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{2[E - U_{\text{eff}}(\theta)]/ml^2}}, \quad (3)$$

kjer je "efektivna potencialna energija enaka"

$$U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{1}{2} M_z^2 / ml^2 \sin^2 \theta - mgl \cos \theta.$$

Za kot  $\phi$  velja enačba, ki jo dobimo iz (1):

$$\phi = \frac{M_z}{l\sqrt{2m}} \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{E - U_{\text{eff}}(\theta)}}. \quad (4)$$

Integrala v enačbah (3) in (4) lahko izrazimo z eliptičnima integraloma prve oziroma tretje vrste.

Območje kotov  $\theta$ , ki jih lahko nihalo zavzame, je omejeno z  $E > U_{\text{eff}}$ , meje pa so podane z enačbo  $E = U_{\text{eff}}$ . To je kubična enačba spremenljivke  $\cos \theta$ , ki ima dva korena med  $-1$  in  $+1$ ; ta določata dva kroga (vzporednika), med katerima leži pot nihala.

**NALOGA 2.** Integriraj gibalne enačbe delca, ki se giblje po površini pokončnega stožca (s kotom stožca  $\alpha$ ), katerega vrh kaže navzdol v gravitacijskem polju.

*Rešitev:* V sferičnih koordinatah z izhodiščem v vrhu stožca (polarna os kaže navzgor) se Lagrangeva funkcija zapiše kot  $L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \alpha) - mgr \cos \alpha$ . Koordinata  $\phi$  je ciklična, zato se  $M_z = mr^2 \dot{\phi} \sin^2 \alpha$  ponovno ohranja. Energija je

$$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} M_z^2 / mr^2 \sin^2 \alpha + mgr \cos \alpha.$$

Po podobnem postopku kot pri prvi nalogi tu dobimo

$$\begin{aligned} t &= \int \frac{dr}{\sqrt{2[E - U_{\text{eff}}(r)]/m}}, \\ \phi &= \frac{M_z}{\sqrt{2m} \sin^2 \alpha} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}}, \\ U_{\text{eff}}(r) &= \frac{M_z^2}{2mr^2 \sin^2 \alpha} + mgr \cos \alpha. \end{aligned}$$

Pogoj  $E = U_{\text{eff}}(r)$  je (če velja  $M_z \neq 0$ ) kubična enačba spremenljivke  $r$ , ki ima dva pozitivna korena; ta določata dva vodoravna kroga na stožcu, med katerima leži trajektorija delca.

**NALOGA 3.** Integriraj gibalne enačbe za nihalo mase  $m_2$ , pritrjeno na utež z maso  $m_1$ , ki se lahko giblje po vodoravni črti, ležeči v ravnini, v kateri se giblje  $m_1$  (slika 2 v § 5).

*Rešitev:* V Lagrangevi funkciji, izpeljani v drugi nalogi v § 5, je koordinata  $x$  ciklična. Posplošena gibalna količina  $P_x$ , ki je vodoravna komponenta celotne gibalne količine sistema, se torej ohranja:

$$P_x = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l \dot{\phi} \cos \phi = \text{konstanta}. \quad (1)$$

Privzamemo lahko, da sistem kot celota miruje. Tedaj je konstanta v enačbi (1) enaka 0. Enačbo lahko tedaj integriramo:

$$(m_1 + m_2)x + m_2 l \sin \phi = \text{konstanta}, \quad (2)$$

kar pomeni, da se težišče sistema ne premika vodoravno.

S pomočjo (1) lahko energijo zapišemo v obliki

$$E = \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\phi}^2 \left( 1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cos^2 \phi \right) - m_2 g l \cos \phi. \quad (3)$$

Od tod dobimo

$$t = l \sqrt{\frac{m_2}{2(m_1 + m_2)}} \int \sqrt{\frac{m_1 + m_2 \sin^2 \phi}{E + m_2 g l \cos \phi}} d\phi.$$

Če koordinati  $x_2 = x + l \sin \phi$  in  $y_2 = l \cos \phi$  delca  $m_2$  izrazimo z  $\phi$  s pomočjo (2), ugotovimo, da se delec giblje po loku elipse z vodoravno polosjo dolžine  $l m_1 / (m_1 + m_2)$  in z navpično polosjo dolžine  $l$ . V limiti  $m_1 \rightarrow \infty$  ponovno dobimo navadno nihalo, ki se giblje po krožnem loku.

## §15 Keplerjev problem

Pomembna skupina centralno simetričnih polj so tista s potencialno energijo, ki je obratno sorazmerna z  $r$ , in torej silo, ki je obratno sorazmerna z  $r^2$ . Primera sta Newtonova gravitacijska privlačnost in Coulombova elektrostatska interakcija, ki je lahko privlačna ali odbojna.

Najprej si oglejmo privlačno polje z

$$U = -\alpha/r, \quad (15.1)$$

kjer je  $\alpha$  pozitivna konstanta. "Efektivna" potencialna energija

$$U_{\text{eff}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \quad (15.2)$$

je prikazana na sliki 10. Ko  $r \rightarrow 0$ , gre  $U_{\text{eff}}$  proti  $+\infty$ , ko  $r \rightarrow \infty$ , pa je  $U_{\text{eff}}$  negativna in gre proti nič. Pri  $r = M^2/m\alpha$  ima minimalno vrednost

$$U_{\text{eff},\text{min}} = -m\alpha^2/2M^2. \quad (15.3)$$

Tir dobimo z uporabo splošne enačbe (14.7). Vanjo vstavimo  $U = -\alpha/r$  in izračunamo elementarni integral. Dobimo

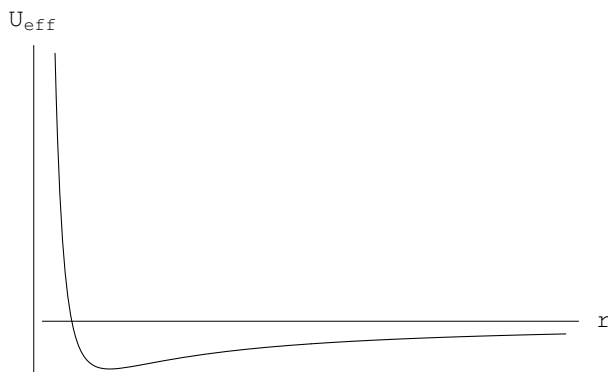
$$\phi = \arccos \frac{(M/r) - (m\alpha/M)}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}} + \text{konstanta}.$$

Izhodišče za kot  $\phi$  si izberemo tako, da je konstanta enaka nič. Uvedemo parametra

$$p = M^2/m\alpha, \quad e = \sqrt{1 + (2EM^2/m\alpha^2)}, \quad (15.4)$$

s katerima lahko enačbo za tir zapišemo kot

$$p/r = 1 + e \cos \phi. \quad (15.5)$$



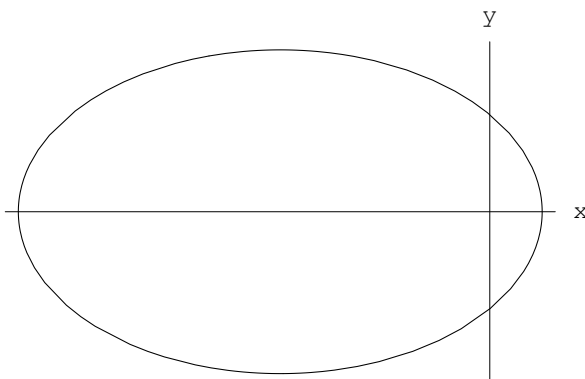
Slika 10:

To je enačba za stožnico z enim izmed gorišč v izhodišču;  $p$  je *goriščni parameter tira* <sup>\*</sup>,  $e$  pa (numerična) *ekscentričnost*. Iz (15.5) je razvidno, da je izbira izhodišča za kot  $\phi$  takšna, da točka z  $\phi = 0$  leži najbližje izhodišču koordinatnega sistema (točko imenujemo *perihelij*).

V ekvivalentnem primeru dveh delcev z interakcijo (15.1) je tir vsakega izmed delcev stožnica z enim goriščem v težišču obeh delcev.

Iz (15.4) sledi, da je za  $E < 0$  ekscentričnost manjša od 1. Tir je tedaj elipsa (slika 11) in gibanje je končno, kar je v skladu s predhodnimi ugotovitvami v tem poglavju. S pomočjo izrekov analitične geometrije ugotovimo, da sta dolžini velike in male polosi enaki

$$a = p/(1 - e^2) = \alpha/2|E|, \quad b = p/\sqrt{1 - e^2} = M/\sqrt{2m|E|}. \quad (15.6)$$



Slika 11:

Ko je energija najmanjša, (15.3), je  $e = 0$ : elipsa postane krožnica. Opazimo, da je dolžina velike osi elipse odvisna le od energije delca, ne pa od vrtilne količine. Najmanjša in največja razdalja od središča polja (v gorišču elipse) sta

$$r_{\min} = p/(1 + e) = a(1 - e), \quad r_{\max} = p/(1 - e) = a(1 + e). \quad (15.7)$$

Ta izraza, z  $a$  in  $e$  podanima z enačbama (15.6) in (15.4), lahko seveda dobimo tudi kot korena enačbe  $U_{\text{eff}}(r) = E$ .

---

<sup>\*</sup> $p = b^2/a$

Obhodni čas po eliptičnem tiru,  $T$ , dobimo na preprost način iz zakona o ohranitvi vrtilne količine v obliki integrala po površini (14.3). Enačbo integriramo po času od 0 do  $T$ , in dobimo  $2mf = TM$ , kjer je  $f = \pi ab$  površina elipse. Upoštevamo (15.6) in dobimo

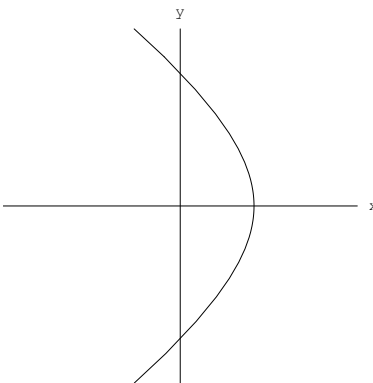
$$\begin{aligned} T &= 2\pi a^{3/2} \sqrt{m/\alpha} \\ &= \pi \alpha \sqrt{(m/2|E|^3)}. \end{aligned} \quad (15.8)$$

Dejstvo, da je kvadrat obhodnega časa sorazmeren s kubičnim številom linearne dimenzije orbite, smo dokazali že v 10. Zanimiva je ugotovitev, da je obhodni čas odvisen samo od energije delca.

Ko je  $E \geq 0$ , je gibanje neomejeno. Če je  $E > 0$ , je ekscentričnost  $e > 1$ , tir je hiperbola z notranjim goriščem v izhodišču koordinatnega sistema (slika 12). Razdalja med goriščem in perihelijem je

$$r_{\min} = p/(e + 1) = a(e - 1), \quad (15.9)$$

kjer je  $a = p/(e^2 - 1) = \alpha/2E$  "pol-os" hiperbole.



Slika 12:

Če je  $E = 0$ , je ekscentričnost  $e = 1$  in delec se giblje po paraboli, katere perihelij je od gorišča oddaljen za  $r_{\min} = \frac{1}{2}p$ . V tem primeru se gibanje začne z mirujočim delcem v neskončnosti.

Koordinate delca v odvisnosti od časa lahko dobimo s pomočjo splošne formule (14.6). Primerno jih je zapisati v parametrični obliki.

Najprej si oglejmo eliptične orbite. Z  $a$  in  $e$  iz (15.6) in (15.4) lahko integral (14.6) zapišemo kot

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r \, dr}{\sqrt{-r^2 + (\alpha/|E|)r - (M^2/2m|E|)}} \\ &= \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \int \frac{r \, dr}{\sqrt{a^2e^2 - (r - a)^2}}. \end{aligned}$$

Uporabimo nastavek  $r - a = -ae \cos \xi$  in integral se poenostavi:

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} \int (1 - e \cos \xi) \, d\xi = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\xi - e \sin \xi) + \text{konstanta}.$$

Čas merimo tako, da je konstanta enaka nič. Tedaj imamo naslednjo parametrično odvisnost med  $r$  in  $t$ :

$$r = a(1 - e \cos \xi), \quad t = \sqrt{ma^3/\alpha}(\xi - e \sin \xi), \quad (15.10)$$

pri čemer je ob času  $t = 0$  delec v periheliju. Tudi kartezični koordinati  $x$  in  $y$  (os  $x$  je vzporedna z veliko osjo elipse, os  $y$  pa z malo osjo) lahko izrazimo s parametrom  $\xi$ . Iz (15.5) in (15.10) sledi

$$ex = p - r = a(1 - e^2) - a(1 - e \cos \xi) = ae(\cos \xi - e);$$

$y$  pa je enak  $\sqrt{r^2 - x^2}$ . Dobimo torej

$$x = a(\cos \xi - e), \quad y = a\sqrt{1 - e^2} \sin \xi. \quad (15.11)$$

Obhodu celotne elipse ustreza sprememba parametra  $\xi$  od 0 do  $2\pi$ .

Povsem analogen račun za hiperbolično orbito da

$$\begin{aligned} r &= a(e \cosh \xi - 1), \quad t = \sqrt{ma^3/\alpha}(e \sinh \xi - \xi), \\ x &= a(e - \cosh \xi), \quad y = a\sqrt{e^2 - 1} \sinh \xi, \end{aligned} \quad (15.12)$$

parameter  $\xi$  pa se v tem primeru spreminja med  $-\infty$  in  $+\infty$ .

Oglejmo si še gibanje v odbojnem polju, kjer je

$$U = \alpha/r, \quad (\alpha > 0). \quad (15.13)$$

Efektivna potencialna energija je

$$U_{\text{eff}} = \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2},$$

ki monotonno pada od  $+\infty$  do 0, ko  $r$  spreminjamo od nič do neskončnosti. Energija delca mora biti pozitivna in gibanje je vedno neomejeno. Računi so podobni tistim za privlačno polje. Tir je hiperbola

$$p/r = -1 + e \cos \phi, \quad (15.14)$$

kjer sta  $p$  in  $r$  ponovno podana z (15.4). Pot delca se približa središču polja, kot je prikazano na sliki 13. Razdalja do perihelija je

$$r_{\min} = p/(e - 1) = a(e + 1). \quad (15.15)$$

Časovna odvisnost je podana s parametričnimi enačbami

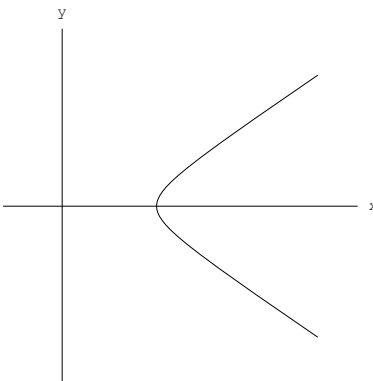
$$\begin{aligned} r &= a(e \cosh \xi + 1), \quad t = \sqrt{ma^3/\alpha}(e \sinh \xi + \xi), \\ x &= a(\cosh \xi + e), \quad y = a\sqrt{e^2 - 1} \sinh \xi. \end{aligned} \quad (15.16)$$

Preden zaključimo ta razdelek bomo dokazali obstoj integrala gibanja za polja oblike  $U = \alpha/r$  (za poljuben predznak količine  $\alpha$ ). Z neposrednim izračunom se lahko hitro prepričamo, da je količina

$$\mathbf{v} \times \mathbf{M} + \alpha \mathbf{r}/r \quad (15.17)$$

konstantna. Njen časovni odvod je  $\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{M} + \alpha \mathbf{v}/r - \alpha \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})/r^3$  ali, ker je  $\mathbf{M} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ ,

$$m\mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) - m\mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}}) + \alpha \mathbf{v}/r - \alpha \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})/r^3.$$



Slika 13:

V ta izraz vstavimo  $m\dot{\mathbf{v}} = \alpha\mathbf{r}/r^3$  iz gibalne enačbe in ugotovimo, da je izraz enak nič.

Ohranjeni vektor (15.17) kaže v smeri glavne osi, iz gorišča proti periheliju, njegova dolžina pa je  $\alpha\epsilon$ . V to se najlažje prepričamo, če poiščemo vrednost vektorja v periheliju.

Poudariti moramo, da je integral gibanja (15.17) enolična funkcija stanja delca (položaja in hitrosti), podobno kot  $M$  in  $E$ . V 50 bomo videli, da dobimo dodatni enolični integral gibanja zaradi *degeneriranosti* gibanja.

### NALOGE

NALOGA 1. Določi časovno odvisnost koordinat delca z energijo  $E = 0$ , ki se giblje po paraboli v potencialu  $U = -\alpha/r$ .

Rešitev: V integralu

$$t = \int \frac{r \, dr}{\sqrt{(2\alpha/m)r - (M^2/m^2)}}$$

opravimo zamenjavo  $r = M^2(1 + \eta^2)/2m\alpha = \frac{1}{2}p(1 + \eta^2)$  in dobimo parametrično izražavo iskane odvisnosti:

$$r = \frac{1}{2}p(1 + \eta^2), \quad t = \sqrt{mp^3/\alpha} \cdot \frac{1}{2}\eta(1 + \frac{1}{3}\eta^2),$$

$$x = \frac{1}{2}p(1 - \eta^2), \quad y = p\eta.$$

Parameter  $\eta$  zavzame vrednosti na intervalu od  $-\infty$  do  $+\infty$ .

NALOGA 2. Integriraj gibalne enačbe za delec v središčno simetričnem polju

$$U = -\alpha/r^2 \quad (\alpha > 0).$$

Rešitev:

Iz enačb (14.6) in (14.7) dobimo, če sta  $\phi$  in  $t$  merjena na ustrezen način,

$$1. \text{ (a) za } E > 0 \text{ in } M^2/2m > \alpha, \quad \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2mE}{M^2 - 2m\alpha}} \cos \left[ \phi \sqrt{1 - \frac{2m\alpha}{M^2}} \right],$$

$$2. \text{ (b) za } E > 0 \text{ in } M^2/2m < \alpha, \quad \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2mE}{2m\alpha - M^2}} \sinh \left[ \phi \sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2} - 1} \right],$$

$$3. \text{ (c) za } E < 0 \text{ in } M^2/2m < \alpha, \quad \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2m|E|}{2m\alpha - M^2}} \cosh \left[ \phi \sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2} - 1} \right].$$

V vseh treh primerih je

$$t = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{1}{2} m \left( E r^2 - \frac{M^2}{2m} + \alpha \right)}.$$

V primerih (b) in (c) delec “pade” v središče po poti, ki se bliža izhodišču, ko gre  $\phi \rightarrow \infty$ . Pri dani vrednosti  $r$  traja padelec končno dolgo, in sicer

$$\frac{1}{E} \sqrt{\frac{1}{2} m} \left[ \sqrt{\alpha - \frac{M^2}{2m} + E r^2} - \sqrt{\alpha - \frac{M^2}{2m}} \right].$$

NALOGA 3. Ko dodamo majhen popravek  $\delta U(r)$  k potencialni energiji  $U = -\alpha/r$ , poti končnega gibanja niso več sklenjene, temveč se po vsakem obhodu perihelij zasuka za majhen kot  $\delta\phi$ . Določi ta kot za (a)  $\delta U = \beta/r^2$  in (b)  $\delta U = \gamma/r^3$ .

Rešitev: Ko gre  $r$  od  $r_{\min}$  do  $r_{\max}$ , se kot  $\phi$  spremeni za (14.10). Ta izraz zapišemo v obliki

$$\Delta\phi = -2 \frac{\partial}{\partial M} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m(E - U) - \frac{M^2}{r^2}} dr,$$

da se izognemo odpravljeni divergenci. V enačbo vstavimo  $U = -\alpha/r + \delta U$  in integrand razvijemo po potencah  $\delta U$ ; člen ničelnega reda da  $2\pi$ , člen prvega reda pa nam da iskani popravek  $\delta\phi$ :

$$\delta\phi = \frac{\partial}{\partial M} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{2m\delta U dr}{\sqrt{2m \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{M^2}{r^2}}} = \frac{\partial}{\partial M} \left( \frac{2m}{M} \int_0^\pi r^2 \delta U d\phi \right), \quad (1)$$

kjer smo integracijo po  $r$  nadomestili z integracijo po  $\phi$  vzdolž poti “nemotenege” gibanja.

V primeru (a) je integral trivialen:  $\delta\phi = -2\pi\beta m/M^2 = -2\pi\beta/\alpha p$ , kjer je  $p$  (15.4) goriščni parameter nemotene elipse. V primeru (b) je  $r^2\delta U = \gamma/r$  in z uporabo izraza za  $1/r$  (15.5) dobimo  $\delta\phi = -6\pi\alpha\gamma m^2/M^4 = -6\pi\gamma/\alpha p^2$ .



## Poglavje 4

# Trki med delci

### §16 Razpad delcev

Pogosto lahko do pomembnih ugotovitev o lastnostih mehanskih procesov pridemo preprosto z uporabo zakonov o ohranitvi gibalne količine in energije. Pomembno se je zavedati, da so te lastnosti povsem neodvisne od interakcije same.

Oglejmo si “spontan” razpad (torej razpad, ki ni posledica delovanja zunanjih sil) delca v dva “sestavna dela”, torej v dva delca, ki se po razpadu gibljeta neodvisno.

Proces najlaže opišemo v opazovalnem sistemu, v katerem delec pred razpadom miruje. Zakon o ohranitvi gibalne količine nam pove, da je vsota gibalnih količin delcev, nastalih ob razpadu, enaka nič. Delca se zato po razpadu gibljeta v nasprotnih smereh z enakima gibalnima količinama. Velikost  $p_0$  vsake izmed gibalnih količin dobimo iz zakona o ohranitvi energije:

$$E_i = E_{1i} + \frac{p_0^2}{2m_1} + E_{2i} + \frac{p_0^2}{2m_2};$$

$m_1$  in  $m_2$  sta masi nastalih delcev,  $E_{1i}$  in  $E_{2i}$  njuni notranji energiji,  $E_i$  pa notranja energija začetnega delca. Naj bo  $\epsilon$  “razpadna energija”, torej razlika

$$\epsilon = E_i - E_{1i} - E_{2i}, \quad (16.1)$$

ki mora očitno biti pozitivna. Potem lahko zapišemo

$$\epsilon = \frac{1}{2}p_0^2 \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{p_0^2}{2m}, \quad (16.2)$$

s čimer določimo  $p_0$ ;  $m$  je reducirana masa obeh delcev. Hitrosti delcev sta  $v_{10} = p_0/m_1$  in  $v_{20} = p_0/m_2$ .

Sedaj se preselimo v opazovalni sistem, v katerim ima razpadajoči delec na začetku hitrost  $V$ . Ta opazovalni sistem običajno imenujemo *laboratorijski opazovalni sistem* ali sistem  $L$ . Opazovalni sistem, v katerem začetni delec miruje, pa je *težiščni sistem* ali sistem  $T$ . Obravnavajmo enega izmed nastalih delcev in naj bosta  $\mathbf{v}$  in  $\mathbf{v}_0$  njegovi hitrosti v sistemih  $L$  in  $T$ . Očitno velja  $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}_0$  ali  $\mathbf{v} - \mathbf{V} = \mathbf{v}_0$ , tako da imamo

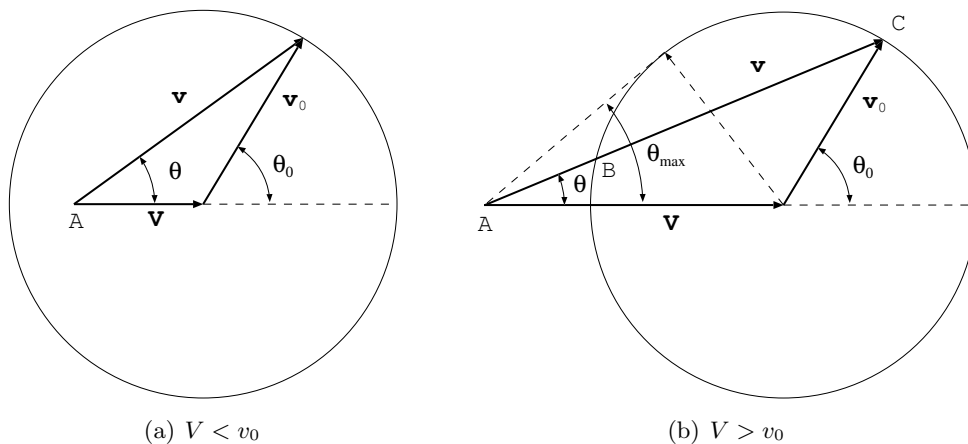
$$v^2 + V^2 - 2vV \cos \theta = v_0^2, \quad (16.3)$$

kjer je  $\theta$  kot, pod katerim se nastali delec giblje glede na hitrost  $\mathbf{V}$ . Enačba podaja hitrost delca kot funkcijo smeri njegovega gibanja v sistemu  $L$ . Na sliki 14 je hitrost  $\mathbf{v}$  prikazana z

vektorjem, ki kaže v poljubno točko na krogu \* s polmerom  $v_0$  iz točke  $A$ , ki je od središča oddaljena za razdaljo  $V$ . Primera  $V < v_0$  oziroma  $V > v_0$  sta prikazana na slikah 4.14(a) oziroma 4.14(b). V prvem primeru ima lahko kot  $\theta$  poljubno vrednost, v drugem pa se delec lahko giblje le naprej pod kotom  $\theta$ , ki je manjši od kota  $\theta_{\max}$ , določenim z

$$\sin \theta_{\max} = v_0/V; \quad (16.4)$$

to je kot tangente na krog, ki poteka skozi točko  $A$ .



Slika 14:

Povezavo med kotoma  $\theta$  in  $\theta_0$  v sistemih  $L$  in  $T$  razberemo iz slike 14:

$$\tan \theta = v_0 \sin \theta_0 / (v_0 \cos \theta_0 + V). \quad (16.5)$$

Če iz te enačbe izrazimo  $\cos \theta_0$ , dobimo

$$\cos \theta_0 = -\frac{V}{v_0} \sin^2 \theta \pm \cos \theta \sqrt{\left(1 - \frac{V^2}{v_0^2} \sin^2 \theta\right)}. \quad (16.6)$$

Če je  $v_0 > V$ , je povezava med  $\theta_0$  in  $\theta$  enolična (glej sliko 4.14(a)). V enačbi (16.6) moramo izbrati znak plus, tako da je  $\theta_0 = 0$ , ko je  $\theta = 0$ . Če pa je  $v_0 < V$ , je povezava med  $\theta_0$  in  $\theta$  dvolična: za vsako vrednost  $\theta$  obstajata dve vrednosti  $\theta_0$ , ki ustrezata vektorjema  $\mathbf{v}_0$ , narisanim iz središča kroga v točki  $B$  iz  $C$  (slika 4.14(b)). Vrednosti  $\theta_0$  dobimo, če v enačbi (16.6) upoštevamo oba predznaka.

V fiziki običajno ne obravnavamo razpada enega samega delca, temveč razpad večjega števila enakih delcev. Zanima nas, kakšna je porazdelitev delcev po smeri, energiji itd. Predpostavili bomo, da so začetni delci poljubno usmerjeni v prostoru, torej da so v povprečju izotropni.

V sistemu  $T$  nalogo zlahka rešimo: vsak nastali delec (določene vrste) ima enako energijo, smeri gibanja pa so izotropno porazdeljene. Slednje je posledica predhodne predpostavke, da so začetni delci naključno usmerjeni. Rečemo lahko, da je delež delcev, ki odletijo v smeri diferencialnega prostorskega kota  $d\sigma_0$ , sorazmeren z  $d\sigma_0$  in je torej enak  $d\sigma_0/4\pi$ . Porazdelitev po kotu  $\theta_0$  dobimo upoštevajoč  $d\sigma_0 = 2\pi \sin \theta_0 d\theta_0$ :

$$\frac{1}{2} \sin \theta_0 d\theta_0. \quad (16.7)$$

\*Bolj natančno: v poljubno točko na krogli s polmerom  $v_0$ . Slika 14 prikazuje prečni presek te krogle.

Ustrezne porazdelitve v sistemu  $L$  dobimo s primerno transformacijo. Izračunajmo na primer porazdelitev po kinetičnih energijah v sistemu  $L$ . Kvadriramo enačbo  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{V}$  in dobimo  $v^2 = v_0^2 + V^2 + 2v_0V \cos \theta_0$ , zato je  $d(\cos \theta_0) = d(v^2)/2v_0V$ . Kinetična energija je  $T = \frac{1}{2}mv^2$ , kjer je  $m$  enak  $m_1$  ali  $m_2$ , odvisno od tega, kateri delec obravnavamo. To vstavimo v (16.7) in dobimo iskano porazdelitev:

$$(1/2mv_0V) dT. \quad (16.8)$$

Kinetična energija lahko doseže vrednosti med  $T_{\min} = \frac{1}{2}m(v_0 - V)^2$  in  $T_{\max} = \frac{1}{2}m(v_0 + V)^2$ . Iz enačbe (16.8) sledi, da so na tem intervalu delci porazdeljeni enakomerno.

Ko delec razpade na več kot dva dela, zakoni o ohranitvi energije in gibalne količine dopuščajo občutno več svobode, kar se tiče hitrosti in smeri gibanja nastalih delcev. Energije delcev v težiščnem sistemu na primer niso čisto določene, obstaja pa zgornja meja kinetične energije, ki jo lahko ima katerikoli izmed nastalih delcev. To mejo določimo za neki delec tako, da obravnavamo sistem vseh delcev razen izbranega (ki ima, na primer, maso  $m_1$ ). "Notranjo energijo" sistema označimo z  $E'_i$ . Iz (16.1) in (16.2) sledi, da je kinetična energija delca z maso  $m_1$  enaka  $T_{10} = p_0^2/2m_1 = (M - m_1)(E_i - E_{1i} - E'_i)/M$ , kjer je  $M$  masa začetnega delca. Očitno ima  $T_{10}$  največjo vrednost tedaj, ko ima  $E'_i$  najmanjšo. Ta je najmanjša tedaj, ko se vsi nastali delci razen izbranega gibljejo z enako hitrostjo. Tedaj je  $E'_i$  kar vsota vrednosti notranjih energij nastalih delcev, razlika  $E_i - E_{1i} - E'_i$  pa je razpadna energija  $\epsilon$ . Zgornja meja je zato

$$T_{10,\max} = (M - m_1)\epsilon/M. \quad (16.9)$$

## NALOGE

NALOGA 1. Poišči zvezo med  $\theta_1$  in  $\theta_2$  (v laboratorijskem sistemu) po razpadu v dva delca.

*Rešitev:* V težiščnem sistemu sta kota povezana z  $\theta_{10} = \pi - \theta_{20}$ . Kot  $\theta_{10}$  označimo kar z  $\theta_0$  in uporabimo enačbo (16.5) za vsakega izmed obeh delcev. Dobimo  $V + v_{10} \cos \theta_0 = v_{10} \sin \theta_0 \cot \theta_1$  in  $V - v_{20} \cos \theta_0 = v_{20} \sin \theta_0 \cot \theta_2$ . Iz teh dveh enačb moramo izločiti  $\theta_0$ . V ta namen najprej razrešimo enačbi za  $\cos \theta_0$  in  $\sin \theta_0$ , izraza kvadriramo in ju izenačimo z ena. Ker je  $v_{10}/v_{20} = m_2/m_1$ , končno z uporabo (16.2) dobimo

$$\begin{aligned} (m_2/m_1) \sin^2 \theta_2 + (m_1/m_2) \sin^2 \theta_1 - 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ = \frac{2\epsilon}{(m_1 + m_2)V^2} \sin^2(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned}$$

NALOGA 2. Določi kotno porazdelitev nastalih delcev v laboratorijskem sistemu.

*Rešitev:* Če je  $v_0 > V$ , vstavimo enačbo (16.6) s pozitivnim predznakom v enačbo (16.7) in dobimo

$$\frac{1}{2} \sin \theta d\theta \left[ 2 \frac{V}{v_0} \cos \theta + \frac{1 + (V^2/v_0^2) \cos 2\theta}{\sqrt{1 - (V^2/v_0^2) \sin^2 \theta}} \right] \quad (0 \leq \theta \leq \pi).$$

Če je  $v_0 < V$  moramo upoštevati obe možni zvezi med  $\theta_0$  in  $\theta$ . Ko  $\theta$  narašča, ena izmed vrednosti  $\theta_0$  narašča, druga pa upada, zato moramo vzeti razliko (in ne vsoto) obeh izrazov  $d \cos \theta$  z različnima predznakoma iz (16.6). Tako dobimo

$$\sin \theta d\theta \frac{1 + (V^2/v_0^2) \cos 2\theta}{\sqrt{1 - (V^2/v_0^2) \sin^2 \theta}} \quad (0 \leq \theta \leq \theta_{\max}).$$

NALOGA 3. Določi območje dovoljenih vrednosti kota  $\theta$  med smerema nastalih delcev v laboratorijskem sistemu.

*Rešitev:* Iskan kot je  $\theta = \theta_1 + \theta_2$ , kjer sta  $\theta_1$  in  $\theta_2$  kota, definirana z (16.5) (glej prvo nalogo). Najlažje izračunamo tangens od  $\theta$ . Če poiščemo ekstreme dobljenih izrazov, dobimo naslednja območja kota  $\theta$ , odvisno od velikost količin  $V$ ,  $v_{10}$  in  $v_{20}$  (predpostavili bomo  $v_{20} > v_{10}$ ):  $0 < \theta < \pi$  za  $v_{10} < V < v_{20}$ ,  $\pi - \theta_0 < \theta < \pi$  za  $V < v_{10}$  in  $0 < \theta < \theta_0$  za  $V > v_{20}$ . Vrednost količine  $\theta_0$  je podana z izrazom

$$\sin \theta_0 = V(v_{10} + v_{20})/(V^2 + v_{10}v_{20}).$$

## §17 Elastični trki

Trk delcev je *elastičen*, če se ob trku notranja stanja delcev ne spremenijo. Ko pri takšnem trku uporabimo zakon o ohranitvi energije, lahko notranje energije delcev zanemarimo.

Trk dveh delcev najlažje opišemo v opazovalnem sistemu, v katerem težišče delcev miruje (sistem  $T$ ). Podobno kot v 16 bomo označevali vrednosti količin v tem sistemu s pripono 0. Hitrosti delcev pred trkom sta povezani z njunimi hitrostmi  $\mathbf{v}_1$  in  $\mathbf{v}_2$  v laboratorijskem sistemu z enačbama  $\mathbf{v}_{10} = m_2\mathbf{v}/(m_1 + m_2)$  in  $\mathbf{v}_{20} = -m_1\mathbf{v}/(m_1 + m_2)$ , kjer je  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$  (glej (13.2)).

Zaradi zakona o ohranitvi gibalne količine ostaneta gibalni količini obeh delcev po trku enaki po velikosti in obratnih smeri. Zaradi ohranitve energije se tudi velikost gibalne količine ne spremeni. V sistemu  $T$  zato trk le zavrti vektorja hitrosti, ki ostaneta v nasprotnih smereh in istih velikosti. Z  $\mathbf{n}_0$  označimo enotski vektor v smeri hitrosti delca  $m_1$  po trku. Hitrosti obeh delcev po trku (kar označujemo s črtico) sta

$$\mathbf{v}'_{10} = m_2v\mathbf{n}_0/(m_1 + m_2), \quad \mathbf{v}'_{20} = -m_1v\mathbf{n}_0/(m_1 + m_2). \quad (17.1)$$

V sistem  $L$  se povrnemo tako, da izrazoma dodamo hitrost težišča  $\mathbf{V}$ . Hitrosti v sistemu  $L$  sta po trku torej

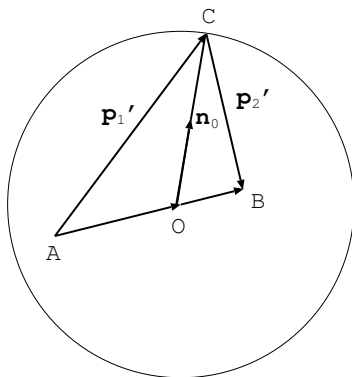
$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_1 &= m_2v\mathbf{n}_0/(m_1 + m_2) + (m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2)/(m_1 + m_2), \\ \mathbf{v}'_2 &= -m_1v\mathbf{n}_0/(m_1 + m_2) + (m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2)/(m_1 + m_2). \end{aligned} \quad (17.2)$$

Iz zakonov o ohranitvi gibalne količine in energije ne moremo izvedeti nič drugega o trku. Smer vektorja  $\mathbf{n}_0$  je odvisna od interakcije med delci in od njihovih medsebojnih leg med trkom.

Dobljene rezultate lahko geometrijsko tolmačimo. V ta namen je bolj primerno uporabljati gibalne količine namesto hitrosti. Enačbi (17.2) pomnožimo z  $m_1$  oziroma z  $m_2$  in dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'_1 &= mv\mathbf{n}_0 + m_1(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)/(m_1 + m_2), \\ \mathbf{p}'_2 &= -mv\mathbf{n}_0 + m_2(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)/(m_1 + m_2), \end{aligned} \quad (17.3)$$

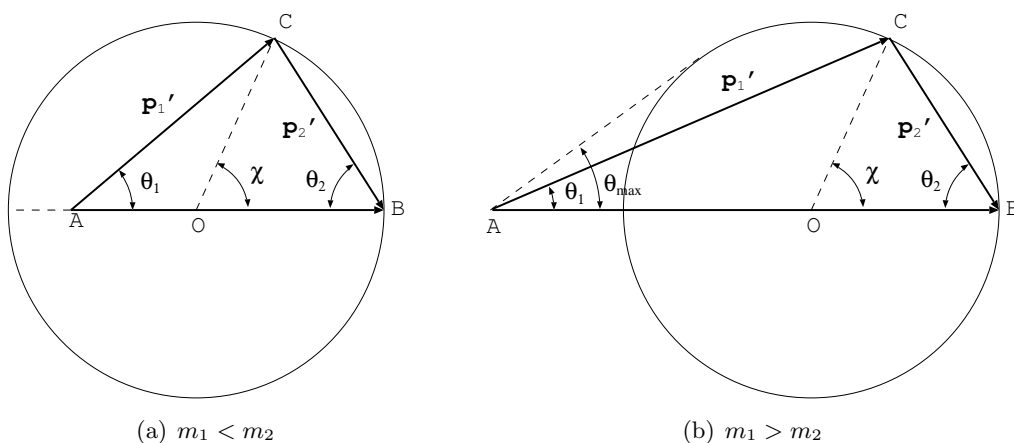
kjer je  $m = m_1m_2/(m_1 + m_2)$  reducirana masa. Narišemo krožnico s polmerom  $mv$  in uporabimo konstrukcijo, prikazano na sliki 15. Če je enotski vektor  $\mathbf{n}_0$  v smeri  $OC$ , tedaj vektorja  $AC$  in  $CB$  predstavljata gibalni količini  $\mathbf{p}'_1$  in  $\mathbf{p}'_2$ . Če sta  $\mathbf{p}_1$  in  $\mathbf{p}_2$  podana, potem so polmer kroga in točki  $A$  in  $B$  povsem določeni, točka  $C$  pa lahko leži kjerkoli na krožnici.



Slika 15:  $\mathbf{OC} = m\mathbf{v}$     $\mathbf{AO} = \frac{m_1}{m_1+m_2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$     $\mathbf{OB} = \frac{m_2}{m_1+m_2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$

Bolj podrobno si oglejmo primer, ko eden izmed delcev (na primer tisti z maso  $m_2$ ) pred trkom miruje. V tem primeru je razdalja  $OB = m_2 p_1 / (m_1 + m_2) = mv$  enaka polmeru, zato  $B$  leži na krožnici. Vektor  $AB$  je enak gibalni količini  $\mathbf{p}_1$  vpadnega delca pred trkom. Točka  $A$  lahko leži v notranjosti kroga ( $m_1 < m_2$ ) ali zunaj njega ( $m_1 > m_2$ ). Ustrezni diagrama sta prikazana na slikah 16a in 16b. Kota  $\theta_1$  in  $\theta_2$  v teh diagramih sta kota med smerema po trku in smerjo vpadnega delca (torej  $\mathbf{p}_1$ ). Središčni kot, označen z  $\chi$ , ki podaja smer  $\mathbf{n}_0$ , je kot, za katerega se je zasukala smer gibanja delca  $m_1$  v sistemu  $T$ . Iz slike razberemo, da lahko kota  $\theta_1$  in  $\theta_2$  izrazimo s kotom  $\chi$ :

$$\tan \theta_1 = \frac{m_2 \sin \chi}{m_1 + m_2 \cos \chi}, \quad \theta_2 = \frac{1}{2}(\pi - \chi). \quad (17.4)$$



(a)  $m_1 < m_2$

(b)  $m_1 > m_2$

Slika 16:  $\mathbf{AB} = \mathbf{p}_1$ ;    $AO/OB = m_1/m_2$

Zapišemo lahko tudi enačbi, ki podajata hitrosti obeh delcev po trku, izraženi z  $\chi$ :

$$v_1' = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 \cos \chi}}{m_1 + m_2}v, \quad v_2' = \frac{2m_1v}{m_1 + m_2} \sin \frac{1}{2}\chi. \quad (17.5)$$

Vsota  $\theta_1 + \theta_2$  je kot med smerema gibanja delcev po trku. Očitno je  $\theta_1 + \theta_2 > \frac{1}{2}\pi$ , če je  $m_1 < m_2$ , in  $\theta_1 + \theta_2 < \frac{1}{2}\pi$ , če je  $m_1 > m_2$ .

Če se delca po trku gibljeta v isti ali v nasprotnih si smereh (čelni trk), imamo  $\chi = \pi$ , torej točka  $C$  leži na premeru kroga med  $O$  in  $A$  (slika 4.16(b));  $\mathbf{p}'_1$  in  $\mathbf{p}'_2$  sta v isti smeri) ali med ?? (slika 4.16(a);  $\mathbf{p}'_1$  in  $\mathbf{p}'_2$  sta v nasprotnih si smereh).

V tem primeru sta hitrosti po trku

$$\mathbf{v}'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}. \quad (17.6)$$

Vrednost količine  $\mathbf{v}'_2$  je tedaj največja, zato je največja energija, ki jo lahko dobi delec, ki na začetku miruje, enaka

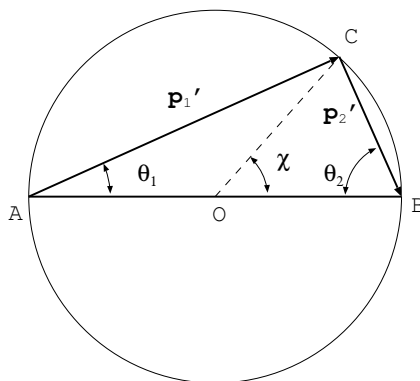
$$E'_{2\max} = \frac{1}{2} m_2 v'_{2\max}{}^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_1, \quad (17.7)$$

kjer je  $E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$  začetna energija vpadnega delca.

Če je  $m_1 < m_2$ , ima lahko hitrost delca  $m_1$  po trku poljubno smer. Če pa je  $m_1 > m_2$ , potem se lahko ta delec ukloni iz svoje začetne smeri le za kot, manjši od  $\theta_{\max}$ ; ta največja vrednost kota  $\theta_1$  ustreza takšnemu položaju točke  $C$ , da je  $AC$  tangenta na krožnico (slika 4.16(b)). Očitno je

$$\sin \theta_{\max} = OC/OA = m_2/m_1. \quad (17.8)$$

Trk med dvema delcema z enako maso, pri čemer eden na začetku miruje, je prav posebno enostaven. V tem primeru ležita točki  $A$  in  $B$  obe na krogu (slika 17).



Slika 17:

Tedaj je

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \chi, \quad \theta_2 = \frac{1}{2} (\pi - \chi), \quad (17.9)$$

$$v_1' = v \cos \frac{1}{2} \chi, \quad v_2' = v \sin \frac{1}{2} \chi. \quad (17.10)$$

Po trku se delca gibljeta pravokotno eden na drugega.

## NALOGA

NALOGA Izrazi hitrosti obeh delcev po trku med gibajočim se delcem ( $m_1$ ) in mirujočim ( $m_2$ ) delcem z njunima smerema gibanja v laboratorijskem sistemu.

Rešitev: Iz slika 16 razberemo, da je  $p_2' = 2OB \cos \theta_2$  ali  $v_2' = 2v(m/m_2) \cos \theta_2$ . Gibalna količina  $p_1' = AC$  je podana z  $OC^2 = AO^2 + p_1'^2 - 2AO \cdot p_1' \cos \theta_1$  ali

$$\left(\frac{v_1'}{v}\right)^2 - \frac{2m}{m_2} \frac{v_1'}{v} \cos \theta_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0.$$

Od tod dobimo

$$\frac{v_1'}{v} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cos \theta_1 \pm \frac{1}{m_1 + m_2} \sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \theta_1};$$

če je  $m_1 > m_2$ , sta možna oba predznaka, če pa je  $m_2 > m_1$ , je predznak vedno pozitiven.

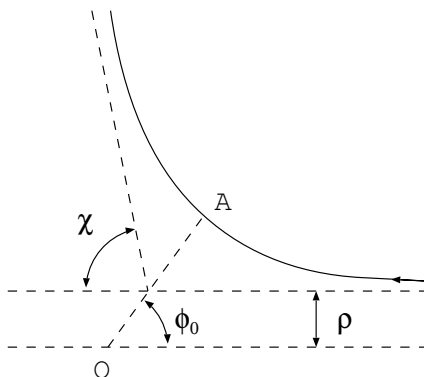
## §18 Sipanje

V prejšnjem razdelku smo ugotovili, da moramo za popoln izračun posledic trka med dvema delcema (torej kota  $\chi$ ) rešiti gibalne enačbe, v katerih upoštevamo interakcijo med delcema.

Najprej si bomo ogledali ekvivalenten primer uklona delca z maso  $m$ , ki se giblje v polju  $U(r)$ , katerega središče je nepremično (in ustreza težišču obeh delcev v izhodiščni nalogi).

Kot smo pokazali v § 14, je pot delca v centralnem polju simetrična glede na daljico, ki povezuje center polja z najbližjo točko na tiru ( $OA$  na sliki 18). Obe asimptoti sta naklonjeni pod istim kotom (imenujmo ga  $\phi_0$ ) glede na to daljico. Kot  $\chi$ , za katerega se delec odkloni na svoji poti mimo centra polja, lahko razberemo iz slike 18 in je enak

$$\chi = |\pi - 2\phi_0|. \quad (18.1)$$



Slika 18:

Kot  $\phi_0$  dobimo iz enačbe (14.7):

$$\phi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(M/r^2) dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - M^2/r^2}}, \quad (18.2)$$

kjer integriramo od najbližje točke  $A$  do neskončnosti. V mislih moramo imeti, da je  $r_{\min}$  ničla radikala v imenovalcu ulomka pod integralom.

Pri neskončnem gibanju, s katerim imamo tukaj opravka, je prikladno, da namesto konstant  $E$  in  $M$  uporabimo hitrost delca v neskončnosti  $v_\infty$  in vpadni parameter  $\rho$ . To je dolžina pravokotnice na smer  $v_\infty$  iz središča  $O$ , torej razdalja, pri kateri bi delec letel mimo središča, če ne bi bilo sile polja (slika 18). Energijo in vrtilno količino lahko s tema količinama zapišemo kot

$$E = \frac{1}{2}mv_\infty^2, \quad M = m\rho v_\infty, \quad (18.3)$$

enačba (18.2) pa postane

$$\phi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(\rho/r^2) dr}{\sqrt{1 - (\rho^2/r^2) - (2U/mv_\infty^2)}}. \quad (18.4)$$

To vstavimo v (18.1) in dobimo  $\chi$  v odvisnosti od  $\rho$ .

V fiziki nas navadno ne zanima uklon enega samega delca, temveč *sipanje* curka enakih delcev, ki na sipalec padajo z enako hitrostjo  $v_\infty$ . Različni delci v curku imajo različne vpadne parametre in se sipajo pod različnimi koti  $\chi$ . Naj bo  $dN$  število delcev, ki se sipajo na enoto časa pod koti med  $\chi$  in  $\chi + d\chi$ . To število samo po sebi ni primerno za opis sipalnega procesa, saj je sorazmerno z gostoto vpadnega toka. Zato uporabimo količino

$$d\sigma = dN/n, \quad (18.5)$$

kjer je  $n$  število delcev, ki na enoto časa preletijo skozi enoto površine v preseku curka (predpostavimo, da je curek homogen po preseku). Količina  $d\sigma$  ima dimenzije ploščine in se imenuje *efektivni sipalni presek*. Sipalni presek je povsem določen s sipalnim poljem in je najpomembnejša karakteristika sipalnega procesa.

Predpostavili bomo, da je povezava med  $\chi$  in  $\rho$  enolična; takšno povezavo imamo, če je sipalni kot monotono padajoča funkcija vpadnega parametra. V tem primeru se samo delci, katerih vpadni parametri ležijo med  $\rho(\chi)$  in  $\rho(\chi) + d\rho(\chi)$ , sipajo pod koti med  $\chi$  in  $\chi + d\chi$ . Število takšnih delcev je enak zmnožku gostote  $n$  in ploščine prstana s polmerom med  $\rho$  in  $\rho + d\rho$ , torej  $dN = 2\pi\rho d\rho \cdot n$ . Efektivni presek je torej

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho. \quad (18.6)$$

Odvisnost med  $d\sigma$  in sipalnim kotom dobimo, če prejšnjo enačbo zapišemo kot

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi) |d\rho(\chi)/d\chi| d\chi. \quad (18.7)$$

Uporabili smo absolutno vrednost odvoda  $d\rho/d\chi$ , saj je odvod lahko negativen (in ponavadi tudi je). Pogosto  $d\rho$  izrazimo z diferencialom prostorskega kota do namesto z diferencialom ravninskega kota  $d\chi$ . Prostorski kot med kotoma  $\chi$  in  $\chi + d\chi$  je  $do = 2\pi \sin \chi d\chi$ . Zato iz (18.7) sledi

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin \chi} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| do. \quad (18.8)$$

Vrnimo se sedaj k sipanju curka delcev na delcih, ki na začetku mirujejo (do tu smo obravnavali sipanje na nepremičnem potencialu). Enačba (18.7) podaja efektivni sipalni presek v težiščnem sistemu. Ustrezno enačbo, kjer kot spremenljivka nastopa sipalni kot  $\theta$  v laboratorijskem sistemu, dobimo, če izrazimo  $\chi$  v enačbi (18.7) s  $\theta$  s pomočjo izraza (17.4). Tako dobimo izraza tako za sipalni presek vpadnega curka delcev ( $\chi$  izrazimo kot funkcijo  $\theta_1$ ) kot za sipalni presek delcev, ki na začetku mirujejo ( $\chi$  izrazimo kot funkcijo  $\theta_2$ ).

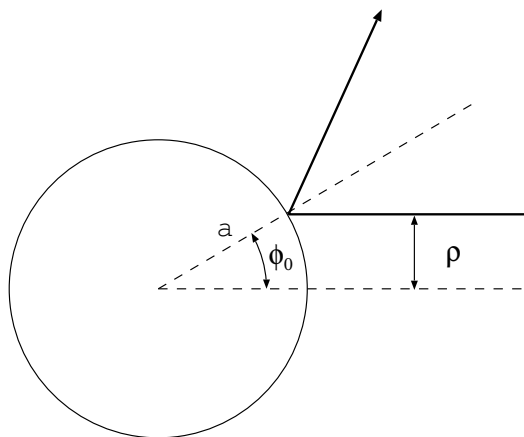


## NALOGE

NALOGA 1. Določi efektivni sipalni presek za delce, ki se sipajo na popolnoma togi krogli s polmerom  $a$  (za popolnoma togo kroglo velja  $U = \infty$  za  $r < a$  in  $U = 0$  za  $r > a$ ).

*Rešitev:* Ker se delec giblje prosto zunaj krogle, ne more pa vanjo prodreti, je pot sestavljena iz dve ravnih črt, ki sta simetrični glede na polpremico iz središča krogle, ki gre skozi točko, kjer delec zadane kroglo (slika 19). Iz slike 19 lahko jasno razberemo, da velja

$$\rho = a \sin \phi_0 = a \sin \frac{1}{2}(\pi - \chi) = a \cos \frac{1}{2}\chi.$$



Slika 19:

To vstavimo v (18.7) ali (18.8) in dobimo

$$d\sigma = \frac{1}{2}\pi a^2 \sin \chi d\chi = \frac{1}{4}a^2 d\phi, \quad (1)$$

kar pomeni, da je sipanje izotropno v težiščnem sistemu. Z integracijo po vseh kotih ugotovimo, da je  $\sigma = \pi a^2$ , kar je v skladu s tem, da je “območje trka”, ki ga mora delec zadeti, da se lahko sipa, kar enako čelnemu preseku krogle.

V laboratorijski sistem se preselimo tako, da  $\chi$  izrazimo z  $\theta_1$  z uporabo izraza (17.4). Izračuni so zaradi formalne podobnosti med enačbama (17.4) in (16.5) povsem analogni tistim iz druge naloge v § 16. Če je  $m_1 < m_2$  (kjer je  $m_1$  masa delca,  $m_2$  pa masa krogle), velja

$$d\sigma_1 = \frac{1}{4}a^2 \left[ 2(m_1/m_2) \cos \theta_1 + \frac{1 + (m_1/m_2)^2 \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - (m_1/m_2)^2 \sin^2 \theta_1}} \right] d\theta_1,$$

kjer je  $d\theta_1 = 2\pi \sin \theta_1 d\theta_1$ . Če pa je  $m_2 < m_1$ , potem velja

$$d\sigma_1 = \frac{1}{2}a^2 \frac{1 + (m_1/m_2)^2 \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - (m_1/m_2)^2 \sin^2 \theta_1}} d\theta_1.$$

Če je  $m_1 = m_2$ , dobimo  $d\sigma_1 = a^2 |\cos \theta_1| d\theta_1$ , kar lahko dobimo tudi tako, da vstavimo  $\chi = 2\theta_1$  iz (17.9) v enačbo (1).

Za kroglo, ki na začetku miruje, je  $\chi = \pi - 2\theta_2$ , zato v vseh primerih dobimo iz enačbe (1)

$$d\sigma_2 = a^2 |\cos \theta_2| d\theta_2.$$

NALOGA 2. Izrazi efektivni sipalni presek iz prve naloge kot funkcijo energije  $\epsilon$ , ki jo izgubi sipani delec.

*Rešitev:* Energija, ki jo izgubi delec z maso  $m_1$ , je enaka energiji, ki jo pridobi krogla z maso  $m_2$ . Iz (17.5) in (17.7) dobimo  $\epsilon = E_2' = [2m_1^2 m_2 / (m_1 + m_2)^2] v_\infty^2 \sin^2 \frac{1}{2} \chi = \epsilon_{\max} \sin^2 \frac{1}{2} \chi$ , od koder sledi  $d\epsilon = \frac{1}{2} \epsilon_{\max} \sin \chi d\chi$ . Ko to vstavimo v (1) iz prve naloge, dobimo  $d\sigma = \pi a^2 d\epsilon / \epsilon_{\max}$ . Porazdelitev izgubljene energije je enakomerna po  $\epsilon$  od 0 do  $\epsilon_{\max}$ .

NALOGA 3. Določi efektivni sipalni presek kot funkcijo hitrosti  $v_\infty$  za delce, ki se sipajo v polju  $U \sim r^{-n}$ .

*Rešitev:* Če je potencialna energija homogena funkcija reda  $k = -n$ , po (10.3) velja za podobne poti  $\rho \sim v^{-2/n}$  ali  $\rho = v_\infty^{-2/n} f(\chi)$ , pri čemer je kot odklona  $\chi$  enak za podobne poti. Če to vstavimo v (18.6), dobimo  $d\sigma \sim v_\infty^{-4/n} d\chi$ .

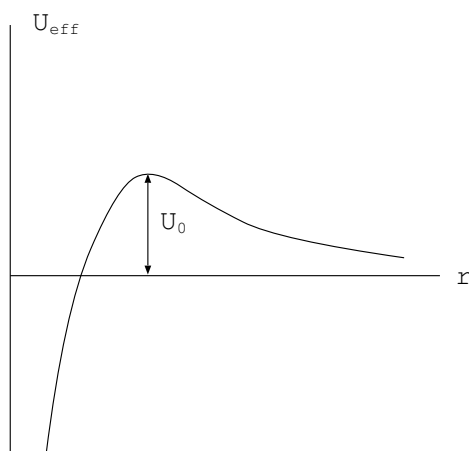
NALOGA 4. Določi efektivni sipalni presek za delec, ki pada proti središču polja  $U = -\alpha/r^2$ .

*Rešitev:* Proti središču "padejo" tisti delci, za katere je  $2\alpha > m\rho^2 v_\infty^2$  (glej (14.11)), torej tisti, katerih parameter trka ni večji od  $\rho_{\max} = \sqrt{2\alpha/mv_\infty^2}$ . Efektivni sipalni presek je torej  $\sigma = \pi\rho_{\max}^2 = 2\pi\alpha/mv_\infty^2$ .

NALOGA 5. Enako kot v prejšnji nalogi, vendar za polje  $U = -\alpha/r^n$  ( $n > 2$ ,  $\alpha > 0$ ).

*Rešitev:* Efektivna potencialna energija  $U_{\text{eff}} = m\rho^2 v_\infty^2 / 2r^2 - \alpha/r^n$  je odvisna od  $r$ , kot je prikazano na sliki 20. Največja energija je

$$U_{\text{eff,max}} \equiv U_0 = \frac{1}{2}(n-2)\alpha(m\rho^2 v_\infty^2 / \alpha n)^{n/(n-2)}.$$



Slika 20:

V središče padejo tisti delci, katerih energija je večja od  $U_0$ . Iz pogoja  $U_0 = E$  dobimo  $\rho_{\max}$ , od tod pa

$$\sigma = \pi n(n-2)^{(2-n)/n} (\alpha/mv_\infty^2)^{2/n}.$$

NALOGA 6. Določi efektivni sipalni presek za trk delca z maso  $m_1$  v kroglo z maso  $m_2$  in polmerom  $R$ . Delec in telo se privlačita v skladu z Newtonovim zakonom.

*Rešitev:* Pogoji, da delec pride do kroglice, je  $r_{\min} < R$ , kjer  $r_{\min}$  ustreza točki na poti, ki je najbližja središču kroglice. Največja možna vrednost  $\rho$  je podana z  $r_{\min} = R$ ; to je enako  $U_{\text{eff}}(R) = E$  ali  $\frac{1}{2}m_1v_\infty^2\rho_{\max}^2/R^2 - \alpha/R = \frac{1}{2}m_1v_\infty^2$ , kjer je  $\alpha = \gamma m_1 m_2$  ( $\gamma$  je gravitacijska konstanta), poleg tega pa smo uporabili približek  $m \approx m_1$  ob predpostavki, da je  $m_2 \gg m_1$ . Razrešimo za  $\rho_{\max}^2$  in končno dobimo  $\sigma = \pi R^2(1 + 2\gamma m_2/Rv_\infty^2)$ . Ko gre  $v_\infty \rightarrow \infty$ , gre efektivni sipalni presek seveda proti geometrijskemu čelnemu preseku kroglice.

**NALOGA 7.** Določi obliko sipalnega polja  $U(r)$ , če poznamo efektivni sipalni presek kot funkcijo sipalnega kota pri dani energiji  $E$ . Pri tem predpostavimo, da je  $U(r)$  enolično padajoča funkcija (odbojno polje) z  $U(0) > E$  in  $U(\infty) = 0$  (O. B. Firsov, 1953).

*Rešitev:* Z integracijo  $d\sigma$  po sipalnem kotu dobimo po enačbi

$$\int_{\chi}^{\pi} (d\sigma/d\chi) d\chi = \pi\rho^2 \quad (1)$$

kvadrat parametra trka, zato je  $\rho(\chi)$  (in torej  $\chi(\rho)$ ) poznana funkcija.

Postavimo

$$s = 1/r, \quad \kappa = 1/\rho^2, \quad w = \sqrt{1 - (U/E)}. \quad (2)$$

Enačbi (18.1),(18.2) lahko tedaj zapišemo kot

$$\frac{1}{2} [\pi - \chi(\kappa)] = \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{xw^2 - s^2}}, \quad (3)$$

kjer je  $s_0(x)$  koren enačbe  $xw^2(s_0) - s_0^2 = 0$ .

Enačba (3) je integralska enačba za funkcijo  $w(s)$  in jo lahko integriramo z metodo, podobno tisti iz § 12. Obe strani enačbe (3) delimo z  $\sqrt{\alpha - x}$  in integriramo po  $x$  od 0 do  $\alpha$ . Dobimo

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \frac{\pi - \chi(\kappa)}{2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\alpha - x}} &= \int_0^\alpha \int_0^{s_0(x)} \frac{ds dx}{\sqrt{(xw^2 - s^2)(\alpha - x)}} \\ &= \int_0^{s_0(\alpha)} \int_{x(s_0)}^\alpha \frac{dx ds}{\sqrt{(xw^2 - s^2)(\alpha - x)}} \\ &= \pi \int_0^{s_0(\alpha)} \frac{ds}{w}, \end{aligned}$$

ko pa integriramo še levo stran po delih, sledi

$$\pi\sqrt{\alpha} - \int_0^\alpha \sqrt{\alpha - x} \frac{d\chi}{dx} dx = \pi \int_0^{s_0(\alpha)} \frac{ds}{w}.$$

Ta izraz odvajamo po  $\alpha$ ,  $s_0(\alpha)$  pa nadomestimo kar z  $s$ ; ob tem  $\alpha$  nadomestimo z  $s^2/w^2$ , rezultat pa lahko v diferencialni obliki zapišemo kot

$$\pi d(s/w) - \frac{1}{2} d(s^2/w^2) \int_0^{s^2/w^2} \frac{\chi'(\kappa) d\kappa}{\sqrt{(s^2/w^2) - \kappa}} = (\pi/w) ds$$

ali

$$-\pi d \log w = d(s/w) \int_0^{s^2/w^2} \frac{\chi'(\kappa) d\kappa}{\sqrt{(s^2/w^2) - \kappa}}.$$

To enačbo lahko preprosto integriramo, če zamenjamo vrstni red integracije na desni. Ker moramo pri  $s = 0$  (torej  $r \rightarrow \infty$ ) imeti  $w = 1$  (oziroma  $U = 0$ ), lahko zapišemo dve ekvivalentni obliki končnega

rezultata (pri tem se vrnemo k začetnima spremenljivkama  $r$  in  $\rho$ ):

$$\begin{aligned} w &= \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_{rw}^{\infty} \cosh^{-1}(\rho/rw) (d\chi/d\rho) d\rho \right] \\ &= \exp \left[ -\frac{1}{\pi} \int_{rw}^{\infty} \frac{\chi(\rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2 w^2}} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Ta enačba implicitno določa funkcijo  $w(r)$  (torej tudi  $U(r)$ ) za vse  $r > r_{\min}$ , torej na območju vrednosti  $r$ , ki jih lahko doseže sipan delec z energijo  $E$ .

## §19 Rutherfordova formula

Eden izmed najpomembnejših primerov uporabe zgoraj izpeljanih enačb je obravnava nabitih delcev v Coulombovem polju. V (18.4) vstavimo  $U = \alpha/r$  in izračunamo elementarni integral. Dobimo

$$\phi_0 = \arccos \frac{\alpha/mv_{\infty}^2 \rho}{\sqrt{1 + (\alpha/mv_{\infty}^2 \rho)^2}},$$

od koder sledi  $\rho^2 = (\alpha^2/m^2 v_{\infty}^4) \tan^2 \phi_0$ , ali (če upoštevamo  $\phi_0 = \frac{1}{2}(\pi - \chi)$ , enačba (18.1))

$$\rho^2 = (\alpha^2/m^2 v_{\infty}^4) \cot^2 \frac{1}{2} \chi. \quad (19.1)$$

Ta izraz odvajamo po  $\chi$  in ga vstavimo v (18.7) oziroma (18.8) in dobimo

$$d\sigma = \pi(\alpha/mv_{\infty}^2)^2 \cos \frac{1}{2} \chi d\chi / \sin^3 \frac{1}{2} \chi \quad (19.2)$$

oziroma

$$d\sigma = (\alpha/2mv_{\infty}^2)^2 d\theta / \sin^4 \frac{1}{2} \chi. \quad (19.3)$$

To je *Rutherfordova formula*. Efektivni presek je neodvisen od predznaka količine  $\alpha$ , zato rezultat velja tako za odbojno kot privlačno Coulombovo polje.

Formula (19.3) podaja efektivni presek v opazovalnem sistemu, v katerem težišče interagirajočih delcev miruje. V laboratorijski sistem se preselimo z uporabo enačbe (17.4). Za delce, ki na začetku mirujejo, v enačbo (19.2) vstavimo  $\chi = \pi - 2\theta_2$  in dobimo

$$\begin{aligned} d\sigma_2 &= 2\pi(\alpha/mv_{\infty}^2)^2 \sin \theta_2 d\theta_2 / \cos^3 \theta_2 \\ &= (\alpha/mv_{\infty}^2)^2 d\theta_2 / \cos^3 \theta_2. \end{aligned} \quad (19.4)$$

Ista transformacija za vpadne delce v splošnem vodi do zelo kompleksnega izraza, zato si bomo ogledali le dva posebna primera.

Če je masa sipalca  $m_2$  velika v primerjavi z maso sipanih delcev  $m_1$ , je  $\chi \approx \theta_1$  in  $m \approx m_1$ , tako da je

$$d\sigma_1 = (\alpha/4E_1)^2 d\theta_1 / \sin^4 \frac{1}{2} \theta_1, \quad (19.5)$$

kjer je  $E_1 = \frac{1}{2}m_1 v_{\infty}^2$  energija vpadnega delca.

Če sta masi obeh delcev enaki ( $m_1 = m_2$ ,  $m = \frac{1}{2}m_1$ ), potem iz (17.9) sledi  $\chi = 2\theta_1$ . To vstavimo v (19.2) in dobimo

$$\begin{aligned} d\sigma_1 &= 2\pi(\alpha/E_1)^2 \cos\theta_1 d\theta_1 / \sin^3\theta_1 \\ &= (\alpha/E_1)^2 \cos\theta_1 d\theta_1 / \sin^4\theta_1. \end{aligned} \quad (19.6)$$

Če sta delca povsem identična, po trku ne moremo vedeti, kateri delec je bil na začetku pri miru. Skupni efektivni presek za vse delce dobimo kot vsoto  $d\sigma_1$  in  $d\sigma_2$ , količini  $\theta_1$  in  $\theta_2$  pa nadomestimo z njuno enotno vrednostjo  $\theta$ :

$$d\sigma = (\alpha/E_1)^2 \left( \frac{1}{\sin^4\theta} + \frac{1}{\cos^4\theta} \right) \cos\theta d\theta. \quad (19.7)$$

Vrnimo se k splošni formuli (19.2) in z njeno pomočjo določimo porazdelitev sipanih delcev po energiji, ki so jo ob trku izgubili. Za poljubni masi sipanega delca ( $m_1$ ) in sipalca ( $m_2$ ) je hitrost, ki jo doseže sipalec, podana s kotom sipanja v težiščnem sistemu kot  $v_2' = [2m_1/(m_1 + m_2)]v_\infty \sin \frac{1}{2}\chi$ ; glej (17.5). Energija, ki jo pridobi  $m_2$  in izgubi  $m_1$ , je torej  $\epsilon = \frac{1}{2}m_2v_2'^2 = (2m^2/m_2)v_\infty^2 \sin^2 \frac{1}{2}\chi$ . Količino  $\sin \frac{1}{2}\chi$  izrazimo z  $\epsilon$  in jo vstavimo v (19.2). Sledi

$$d\sigma = 2\pi(\alpha^2/m_2v_\infty^2) d\epsilon/\epsilon^2. \quad (19.8)$$

To je iskana enačba, ki podaja efektivni sipalni presek kot funkcijo izgubljene energije  $\epsilon$  (ta ima vrednosti med 0 in  $\epsilon_{\max} = 2m^2v_\infty^2/m_2$ ).

## NALOGE

NALOGA 1. Izračunaj efektivni sipalni presek za sipanje v polju  $U = \alpha/r^2$  ( $\alpha > 0$ ).

Rešitev: Kot odklona je

$$\chi = \pi \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2\alpha/m\rho^2v_\infty^2}} \right].$$

Efektivni sipalni presek

$$d\sigma = \frac{2\pi^2\alpha}{mv_\infty^2} \cdot \frac{\pi - \chi}{\chi^2(2\pi - \chi)^2} \cdot \frac{d\chi}{\sin\chi}.$$

NALOGA 2. Določi efektivni sipalni presek za sipanje na krogelni "potencialni jami" s polmerom  $a$ , katere "globina" je  $U_0$  (torej polje, za katerega velja  $U = 0$  za  $r > a$  in  $U = -U_0$  za  $r < a$ ).

Rešitev: Delec se giblje po ravni črti, ki se lomi ob vstopu v jamo in ob izstopu iz nje. V nalogi v § 7 smo ugotovili, da sta vpadni kot  $\alpha$  in kot loma  $\beta$  (slika 21) povezana z  $\sin\alpha/\sin\beta = n$ , kjer je  $n = \sqrt{1 + 2U_0/mv_\infty^2}$ . Celotni kot odklona je  $\chi = 2(\alpha - \beta)$ . Od tod dobimo

$$\frac{\sin(\alpha - \frac{1}{2}\chi)}{\sin\alpha} = \cos \frac{1}{2}\chi - \cot\alpha \sin \frac{1}{2}\chi = \frac{1}{n}.$$

Če odpravimo  $\alpha$  iz te enačbe in iz enačbe  $a \sin\alpha = \rho$ , ki jo lahko preprosto razberemo iz skice, dobimo zvezo med  $\rho$  in  $\chi$ :

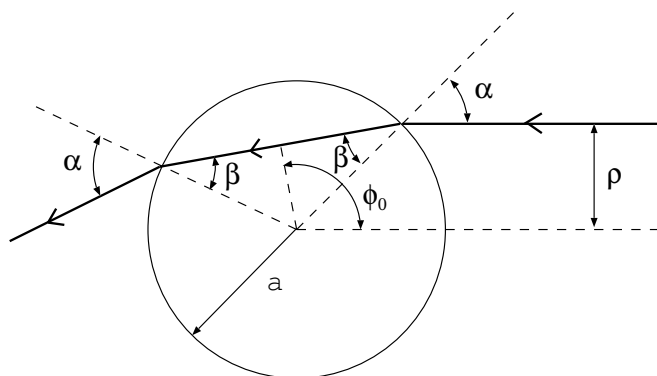
$$\rho^2 = a^2 \frac{n^2 \sin^2 \frac{1}{2}\chi}{n^2 + 1 - 2n \cos \frac{1}{2}\chi}.$$

Z odvajanjem končno dobimo efektivni sipalni presek:

$$d\sigma = \frac{a^2 n^2}{4 \cos \frac{1}{2}\chi} \frac{(n \cos \frac{1}{2}\chi - 1)(n - \cos \frac{1}{2}\chi)}{(n^2 + 1 - 2n \cos \frac{1}{2}\chi)^2} d\chi.$$

Kot  $\chi$  zavzame vrednosti od 0 (za  $\rho = 0$ ) do  $\chi_{\max}$  (za  $\rho = a$ ), kjer je  $\cos \frac{1}{2}\chi_{\max} = 1/n$ .

Celotni efektivni sipalni presek, ki ga dobimo z integracijo do po vseh kotih v notranjosti stožca  $\chi < \chi_{\max}$ , je seveda enak geometrijskemu sipalnemu preseku  $\pi a^2$ .



Slika 21:

## §20 Sipanje za majhen kot

Izračun sipalnega preseka se močno poenostavi, če obravnavamo le tiste trke, pri katerih je parameter trka velik, tako da je polje  $U$  šibko in koti odklona majhni. Računamo lahko kar v laboratorijskem sistemu, uporaba težiščnega sistema ni potrebna.

Os  $x$  izberemo v smeri začetne gibalne količine sipanega delca  $m_1$  in naj bo  $xy$  ravnina sipanja. S  $\mathbf{p}'_1$  označimo gibalno količino delca po sipanju. Očitno velja  $\sin \theta_1 = p_{1y}'/p_1'$ . Pri majhnih odklonih lahko  $\sin \theta_1$  približno nadomestimo s  $\theta_1$ ,  $p_1'$  v imenovalcu pa z začetno gibalno količino  $p_1 = m_1 v_\infty$ :

$$\theta_1 \approx p_{1y}'/m_1 v_\infty. \quad (20.1)$$

Ker je  $\dot{p}_y = F_y$ , je celotni porast gibalne količine v smeri  $y$  enak

$$p_{1y}' = \int_{-\infty}^{\infty} F_y dt. \quad (20.2)$$

Sila  $F_y$  je enaka  $F_y = -\partial U/\partial y = -(dU/dr)\partial r/\partial y = -(dU/dr)y/r$ .

Ker integral (20.2) že vsebuje majhno količino  $U$ , ga lahko v istem redu približka izračunamo ob predpostavki, da se delec sploh ne odkloni iz svoje začetne poti, torej da se premika po premici  $y = \rho$  z enakomerno hitrostjo  $v_\infty$ . Zato v (20.2) vstavimo  $F_y = -(dU/dr)\rho/r$  in  $dt = dx/v_\infty$ . Dobimo

$$p_{1y}' = -\frac{\rho}{v_\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dU}{dr} \frac{dx}{r}.$$

Končno zamenjamo integracijo po  $x$  z integracijo po  $r$ . Ker je pri ravni poti  $r^2 = \rho^2 + x^2$ , se  $r$  spreminja od  $\infty$  do  $\rho$  in nazaj, ko se  $x$  spreminja od  $-\infty$  do  $+\infty$ . Integral po  $x$  zato

postane dvakratnik integrala po  $r$  od  $\rho$  do  $\infty$ . Velja še  $dx = r dr / \sqrt{r^2 - \rho^2}$ . Siplni kot  $\theta_1$  zato dobimo iz enačbe \*

$$\theta_1 = -\frac{2\rho}{m_1 v_\infty^2} \int_\rho^\infty \frac{dU}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}, \quad (20.3)$$

kar je oblika funkcije  $\theta_1(\rho)$  za majhne odklone. Efektivni sipalni presek v sistemu  $L$  dobimo iz (18.8), kamor namesto  $\chi$  vstavimo  $\theta_1$ , in kjer  $\sin \theta_1$  nadomestimo z  $\theta_1$ :

$$d\sigma = \left| \frac{d\rho}{d\theta_1} \right| \frac{\rho(\theta_1)}{\theta_1} d\theta_1. \quad (20.4)$$

## NALOGE

NALOGA 1. Izpelji enačbo (20.3) iz (18.4).

Rešitev: Da se izognemo nepotrebnim divergencam, zapišemo (18.4) kot

$$\phi_0 = -\frac{\partial}{\partial \rho} \int_{r_{\min}}^R \sqrt{\left[1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{mv_\infty^2}\right]} dr,$$

pri čemer za zgornjo integracijsko mejo vzamemo neko veliko količino  $R$ , ki jo bomo na koncu izpeljave poslali proti neskončnosti. Ker je  $U$  majhna količina, lahko koren razvijemo po potencah  $U$ . Približno lahko zamenjamo  $r_{\min}$  z  $\rho$ . Tako dobimo:

$$\phi_0 = \int_\rho^R \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{1 - \rho^2/r^2}} + \frac{\partial}{\partial \rho} \int_\rho^\infty \frac{U(r) dr}{mv_\infty^2 \sqrt{1 - \rho^2/r^2}}.$$

Prvi integral gre proti  $\frac{1}{2}\pi$ , ko gre  $R \rightarrow \infty$ . Drugi integral izračunamo po delih in dobimo

$$\begin{aligned} \pi - 2\phi_0 &= 2 \frac{\partial}{\partial \rho} \int_\rho^\infty \frac{\sqrt{r^2 - \rho^2}}{mv_\infty^2} \frac{dU}{dr} dr \\ &= -\frac{2\rho}{mv_\infty^2} \int_\rho^\infty \frac{dU}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}. \end{aligned}$$

To je enako izrazu (20.3).

NALOGA 2. Določi efektivni sipalni presek za sipanje pod majhnim kotom v polju  $U = \alpha/r^n$  ( $n > 0$ ).

Rešitev: Iz (20.3) dobimo

$$\theta_1 = \frac{2\rho\alpha n}{m_1 v_\infty^2} \int_\rho^\infty \frac{dr}{r^{n+1} \sqrt{r^2 - \rho^2}}.$$

Z zamenjavo  $\rho^2/r^2 = u$  integral prevedemo na funkcijo beta, ki jo izrazimo s funkcijo gama:

$$\theta_1 = \frac{2\alpha\sqrt{\pi}}{m_1 v_\infty^2 \rho^n} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}n)}.$$

Izrazimo  $\rho$  z  $\theta_1$  in to vstavimo v (20.4), pa dobimo

$$d\sigma = \frac{1}{n} \left[ \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}n)} \cdot \frac{\alpha}{m_1 v_\infty^2} \right]^{2/n} \theta_1^{-2-2/n} d\theta_1.$$

\*Če to izpeljavo opravimo v težiščnem sistemu, je dobljeni izraz za  $\chi$  enak, le da je  $m_1$  nadomeščen z  $m$ , kar je skladno z dejstvom, da sta pri majhnih kotih odklona  $\theta_1$  in  $\chi$  povezana z  $\theta_1 = m_2\chi/(m_1 + m_2)$  (glej (17.4)).

## Poglavje 5

# Majhna nihanja

### §21 Prosto nihanje v eni dimenziji

Zelo pogosta oblika gibanja mehanskega sistema je *majhno nihanje* sistema okoli stabilne ravnovesne lege. Najprej si bomo ogledali najbolj preprost primer sistema z eno samo prostostno stopnjo.

Stabilna ravnovesna lega sistema je položaj, v katerem je potencialna energija sistema  $U(q)$  minimalna. Odmik iz te lege povzroči silo  $-dU/dq$ , ki vrača sistem v ravnovesje. Naj bo ravnovesna vrednost posplošene koordinate  $q$  enaka  $q_0$ . Pri majhnih odmikih iz ravnovesne lege zadostuje, da obdržimo prvi od nič različni člen v razvoju razlike  $U(q) - U(q_0)$  po potencah  $q - q_0$ . Običajno je to kvadratni člen:  $U(q) - U(q_0) \cong \frac{1}{2}k(q - q_0)^2$ , kjer je  $k$  pozitiven koeficient, enak vrednosti drugega odvoda  $U''(q)$  v točki  $q = q_0$ . Potencialno energijo bomo merili glede na njeno najmanjšo vrednost, torej postavimo  $U(q_0) = 0$  in vpeljemo okrajšavo

$$x = q - q_0 \quad (21.1)$$

za odmik koordinate iz njene ravnovesne vrednosti. Dobimo

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2. \quad (21.2)$$

Kinetična energija sistema z eno prostostno stopnjo je v splošnem oblike  $\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 = \frac{1}{2}a(q)\dot{x}^2$ . V okviru istega reda približka lahko funkcijo  $a(q)$  nadomestimo z njeno vrednostjo v točki  $q = q_0$ . Vpeljemo okrajšavo  $a(q_0) = m$  \* in dobimo naslednji zapis Lagrangeve funkcije sistema, ki šibko niha v eni dimenziji †

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2. \quad (21.3)$$

Ustrezna enačba gibanja je

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (21.4)$$

ali

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (21.5)$$

---

\*Omeniti moramo, da količina  $m$  predstavlja maso le tedaj, ko je  $x$  kartezična koordinata.

†Takšen sistem pogosto imenujemo enodimenzionalno nihalo.



kjer je

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (21.6)$$

Neodvisni rešitvi linearne diferencialne enačbe (21.5) sta funkciji  $\cos \omega t$  in  $\sin \omega t$ , zato se splošna rešitev glasi

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t. \quad (21.7)$$

Ta izraz lahko zapišemo v obliki

$$x = a \cos(\omega t + \alpha). \quad (21.8)$$

Ker je  $\cos(\omega t + \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha$ , dobimo s primerjavo z (21.7) naslednjo povezavo med konstantama  $a$  in  $\alpha$  ter  $c_1$  in  $c_2$ :

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \tan \alpha = -c_2/c_1. \quad (21.9)$$

V bližini ravnovesne lege sistem torej niha harmonično. Koeficient  $a$  periodične funkcije v (21.8) se imenuje amplituda nihanja, argument funkcije kosinus pa je *faza* nihanja;  $\alpha$  je začetna vrednost faze in je očitno odvisna od izbire izhodišča za merjenje časa. Količina  $\omega$  se imenuje *kotna frekvenca* nihanja; v teoretični fiziki jo običajno imenujemo preprosto kar frekvenca in ta dogovor bomo upoštevali tudi v nadaljevanju.

Frekvenca je osnovna karakteristika nihanja in je neodvisna od začetnih pogojev gibanja. Enačba (21.6) pove, da je frekvenca povsem določena z lastnostmi mehanskega sistema samega. Poudariti pa moramo, da je ta lastnost frekvence odvisna od predpostavke, da je nihanje majhno, in da ne velja več v višjih redih približka. Matematično je to posledica tega, da je potencialna energija kvadratna funkcija koordinate. \*

Energija sistema, ki šibko niha, je  $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)$ , ali, če vstavimo (21.8),

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2. \quad (21.10)$$

Energija je sorazmerna kvadratu amplitude.

Časovno odvisnost koordinate sistema, ki niha, pogosto elegantno zapišemo kot realni del kompleksnega izraza:

$$x = \Re[A \exp(i\omega t)], \quad (21.11)$$

kjer je  $A$  kompleksna konstanta; če zapišemo

$$A = a \exp(i\alpha), \quad (21.12)$$

dobimo izraz (21.8). Konstanta  $A$  se imenuje *kompleksna amplituda*; njena absolutna vrednost je običajna amplituda, argument pa je začetna faza.

Uporaba eksponentnih faktorjev je enostavnejša kot uporaba trigonometrijskih, saj se njihova oblika pri odvajanju ne spremeni. Če so vse uporabljene operacije linearne (seštevanje, množenje s konstanto, odvajanje, integriranje), lahko pisanje znaka  $\Re$  med računanjem opustimo in ga upošteevamo šele pri končnem rezultatu.

## NALOGE

\*Zato ne velja dobro, če ima funkcija  $U(x)$  pri  $x = 0$  minimum višjega reda, na primer če je  $U \sim x^n$  z  $n > 2$ ; glej § 11, Naloga 2(a).

NALOGA 1. Izrazi amplitudo in začetno fazo nihanja z začetno koordinato  $x_0$  in začetno hitrostjo  $v_0$ .

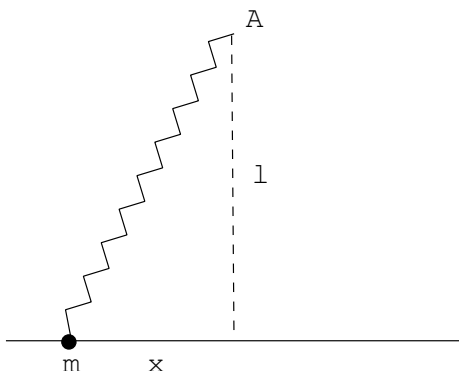
Rešitev:  $a = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2}$   $\tan \alpha = -v_0/\omega x_0$ .

NALOGA 2. Določi razmerje med frekvencama nihanja  $\omega$  in  $\omega'$  dveh dvoatomskih molekul, ki sta sestavljeni iz različnih izotopov, pri čemer so mase atomov  $m_1, m_2$  in  $m_1', m_2'$ .

Rešitev: Ker atomi izotopov interagirajo na enak način, je  $k = k'$ . Koefficienta  $m$  v izrazih za kinetično energijo molekul sta njihovi reducirani masi. Iz (21.6) tako dobimo

$$\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{m_1 m_2 (m_1' + m_2')}{m_1' m_2' (m_1 + m_2)}}.$$

NALOGA 3. Določi frekvenco nihanja delca z maso  $m$ , ki se lahko prosto giba vzdolž ravne črte, in ki je z vzmetjo pritrjen na točko  $A$  (slika 22). Točka  $A$  je od črte oddaljena za  $l$ . Vzmet raztegemo na dolžino  $l$  s silo  $F$ .



Slika 22:

Rešitev: Potencialna energija vzmeti je (do členov najnižjega reda) enaka sili  $F$ , pomnoženi z raztežkom vzmeti  $\delta l$ . Za  $x \ll l$  velja  $\delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l = x^2/2l$ , zato je  $U = Fx^2/2l$ . Ker je kinetična energija enaka  $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ , od tod sledi  $\omega = \sqrt{F/ml}$ .

NALOGA 4. Kot v tretji nalogi, tokrat za delec z maso  $m$ , ki se giblje po krožnici s polmerom  $r$  (slika 23).

Rešitev: V tem primeru je raztezek vzmeti enak (če je  $\phi \ll 1$ )

$$\delta l = \sqrt{r^2 + (l+r)^2} - 2r(l+r)\cos\phi - l \approx r(l+r)\phi^2/2l.$$

Kinetična energija je  $T = \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2$ , frekvenca pa je torej  $\omega = \sqrt{F(r+l)/mrl}$ .

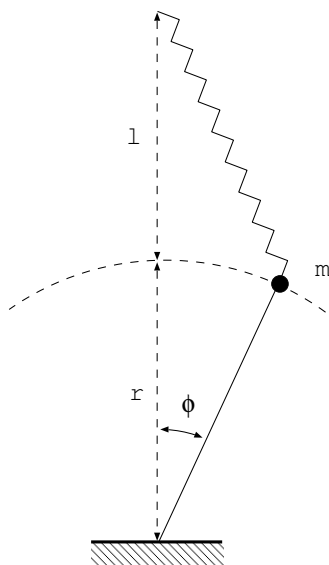
NALOGA 5. Določi frekvenco nihanja nihala, prikazanega na sliki 2 (§ 5). Nihalo je pritrjeno na maso  $m_1$ , ki se lahko v vodoravni smeri prosto giblje.

Rešitev: Za  $\phi \ll 1$  dobimo z enačbo, izpeljano v tretji nalogi v § 14,

$$T = \frac{1}{2}m_1 m_2 l^2 \dot{\phi}^2 / (m_1 + m_2), \quad U = \frac{1}{2}m_2 g l \phi^2.$$

Od tod dobimo

$$\omega = \sqrt{\frac{g(m_1 + m_2)}{m_1 l}}.$$



Slika 23:

NALOGA 6. Določi obliko krivulje, ki ima to lastnost, da frekvenca nihanja (pod vplivom sile težnosti) delca na njej ni odvisna od amplitude.

*Rešitev:* Krivulja z iskano lastnostjo mora biti takšna, da je potencialna energija delca, ki se giblje po njej, enaka  $U = \frac{1}{2}ks^2$ , kjer je  $s$  ločna dolžina, merjena iz ravnovesne lege. Kinetična energija je  $T = \frac{1}{2}m\dot{s}^2$ , kjer je  $m$  masa delca. Frekvenca je tedaj  $\omega = \sqrt{k/m}$ , ne glede na začetno vrednost koordinate  $s$ .

V polju sile težnosti je  $U = mgy$ , kjer je  $y$  navpična koordinata. Veljati mora  $\frac{1}{2}ks^2 = mgy$  ali  $y = \omega^2 s^2 / 2g$ . Ker je  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ , od tod sledi

$$x = \int \sqrt{(ds/dy)^2 - 1} dy = \int \sqrt{(g/2\omega^2 y) - 1} dy.$$

Integracija po zamenjavi  $y = g(1 - \cos \xi) / 4\omega^2$  postane preprosta, dobimo pa  $x = g(\xi + \sin \xi) / 4\omega^2$ . Ta dva izraza sta parametrična enačba za iskano krivuljo, ki je cikloida.

## §22 Vsiljeno nihanje

Oglejmo si nihanje sistema, na katerega deluje spremenljiva zunanja sila. Takšna nihanja imenujemo *vsiljena*, medtem ko nihanja, obravnavana v prejšnjem razdelku, imenujemo *prosta*. Nihanja naj bodo ponovno majhna, kar pomeni tudi, da mora biti zunanje polje šibko, saj bi sicer odmik  $x$  lahko dosegel prevelike vrednosti.

Sistem naj ima sedaj poleg potencialne energije  $\frac{1}{2}kx^2$  dodatno potencialno energijo  $U_e(x, t)$ , ki je posledica delovanja zunanjega polja. Dodatni člen razvijemo po potencah majhne količine  $x$  in dobimo  $U_e(x, t) \cong U_e(0, t) + x[\partial U_e / \partial x]_{x=0}$ . Prvi člen je odvisen samo od časa, zato ga lahko v Lagrangevi funkciji izpustimo, saj je totalni časovni odvod neke druge funkcije časa. V preostalem členu je  $-[\partial U + e / \partial x]_{x=0}$  zunanja "sila", ki deluje na sistem v ravnovesni legi,

in je podana funkcija časa, ki jo označimo z  $F(t)$ . Potencialna energija torej vsebuje dodatni člen  $-xF(t)$ , zato se Lagrangeva funkcija sistema glasi

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + xF(t). \quad (22.1)$$

Ustrezna enačba gibanja je  $m\ddot{x} + kx = F(t)$  ali

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(t)/m, \quad (22.2)$$

kjer smo ponovno vpeljali frekvenco prostega nihanja  $\omega$ .

Splošna rešitev te nehomogene linearne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti je  $x = x_0 + x_1$ , kjer je  $x_0$  splošna rešitev ustrezne homogene enačbe,  $x_1$  pa je partikularna rešitev nehomogene enačbe. Tukaj je  $x_0$  kar prosto nihanje, opisano v 21.

Oglejmo si primer, ki je še posebno zanimiv, ko je zunanja sila periodična funkcija časa z neko frekvenco  $\gamma$ :

$$F(t) = f \cos(\gamma t + \beta). \quad (22.3)$$

Iščemo partikularno rešitev enačbe (22.2) oblike  $x_1 = b \cos(\gamma t + \beta)$  z enakim periodičnim faktorjem. Nastavek vstavimo v enačbo in dobimo  $b = f/m(\omega^2 - \gamma^2)$ ; prištejemo še rešitev homogene enačbe in dobimo splošni integral oblike

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + [f/m(\omega^2 - \gamma^2)] \cos(\gamma t + \beta). \quad (22.4)$$

Poljubni konstanti  $a$  in  $\alpha$  dobimo iz začetnih pogojev.

Sistem se pod vplivom periodične zunanje sile giblje kot kombinacija dveh nihanj, enega z lastno frekvenco sistema  $\omega$ , drugega s frekvenco zunanje sile  $\gamma$ .

Rešitev (22.4) ne velja, ko nastopi *rezonanca*, torej ko je frekvenca zunanje sile  $\gamma$  enaka lastni frekvenci sistema  $\omega$ . Splošno rešitev enačbe gibanja v tem primeru dobimo, če (22.4) zapišemo v obliki

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + [f/m(\omega^2 - \gamma^2)][\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)],$$

kjer ima  $a$  sedaj drugačno vrednost. Ko gre  $\gamma \rightarrow \omega$ , je drugi člen nedoločen, in sicer je oblike  $0/0$ . To nedoločenost razrešimo z uporabo l'Hospitalovega pravila in dobimo

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + (f/2m\omega)t \sin(\omega t + \beta). \quad (22.5)$$

Amplituda nihanja v resonanci narašča linearno s časom (dokler nihanje ni več majhno in celotna zgornja teorija postane neveljavna).

Oglejmo si lastnosti majhnega nihanja v bližini resonance, kjer je  $\gamma = \omega + \epsilon$  in je  $\epsilon$  majhna količina. Splošno rešitev zapišemo v kompleksni obliki

$$x = A \exp(i\omega t) + B \exp[i(\omega + \epsilon)t] = [A + B \exp(i\epsilon t)] \exp(i\omega t). \quad (22.6)$$

Ker se količina  $A + B \exp(i\epsilon t)$  le malo spremeni v času ene periode  $2\pi/\omega$  faktorja  $\exp(i\omega t)$ , lahko gibanje v bližini resonance smatramo kot majhno nihanje s spremenljivo amplitudo. \* To amplitudo označimo s  $C$  in dobimo  $C = |A + B \exp(i\epsilon t)|$ . Količini  $A$  in  $B$  zapišemo v obliki  $a \exp(i\alpha)$  in  $b \exp(i\beta)$ , pa dobimo

$$C^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\epsilon t + \beta - \alpha). \quad (22.7)$$

---

\* "Konstantni" člen v fazi nihala se tudi spreminja.

Amplituda se torej spreminja periodično s frekvenco  $\epsilon$  med  $|a-b|$  in  $a+b$ . Ta pojav se imenuje *utripanje*.

Enačbo gibanja (22.2) lahko integriramo v zaključeni obliki za poljubno zunanje polje  $F(t)$ . To hitro dosežemo, če enačbo zapišemo v obliki

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\omega x) - i\omega(\dot{x} + i\omega x) = \frac{1}{m}F(t)$$

ali

$$d\xi/dt - i\omega\xi = F(t)/m, \quad (22.8)$$

kjer je

$$\xi = \dot{x} + i\omega x \quad (22.9)$$

kompleksna količina. Enačba (22.8) je prvega reda. Njena rešitev, če desno stran nadomestimo z nič, je enaka  $\xi = A \exp(i\omega t)$  s konstantnim  $A$ . Kot prej bomo rešitev nehomogene enačbe poiskali z nastavkom  $\xi = A(t) \exp(i\omega t)$ . Za funkcijo  $A(t)$  dobimo enačbo  $\dot{A}(t) = F(t) \exp(-i\omega t)/m$ . Po integraciji dobimo rešitev za (22.9):

$$\xi = \exp(i\omega t) \left\{ \int_0^t \frac{1}{m} F(t) \exp(-i\omega t) dt + \xi_0 \right\}, \quad (22.10)$$

kjer je vrednost integracijske konstante  $\xi_0$  enaka vrednosti  $\xi$  ob času  $t = 0$ . To je iskana splošna rešitev; funkcijo  $x(t)$  dobimo kot imaginarni del izraza (22.10), deljenim z  $\omega$ . \*

Energija sistema, ki niha pod vplivom zunanje sile, se ne ohranja, ker sistem dobiva energijo iz izvira zunanje sile. Določimo energijo, ki jo sprejme sistem v celotnem času, ob predpostavki, da je začetna energija enaka nič. Iz enačbe (22.10) razberemo, če spodnjo integracijsko mejo postavimo na  $-\infty$  namesto na 0 in zahtevamo  $\xi(-\infty) = 0$ , da imamo v limiti  $t \rightarrow \infty$

$$|\xi(\infty)|^2 = \frac{1}{m^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \exp(-i\omega t) dt \right|^2.$$

Energija sistema je

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{1}{2} m |\xi|^2. \quad (22.11)$$

Vstavimo  $|\xi(\infty)|^2$  in dobimo preneseno energijo

$$E = \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \exp(-i\omega t) dt \right|^2; \quad (22.12)$$

ta energija je torej kvadrat amplitude Fourierove komponente sile  $F(t)$ , katere frekvenca je lastna frekvenca sistema.

V posebnem primeru, ko zunanja sila deluje zelo kratek čas v primerjavi z  $1/\omega$ , lahko uporabimo približek  $\exp(-i\omega t) \cong 1$ . Potem je

$$E = \frac{1}{2m} \left( \int_{-\infty}^{\infty} F(t) dt \right)^2.$$

Rezultat je pričakovan: kratkotrajna sila da sistemu gibalno količino  $\int F dt$ , ne da bi povzročila opazen premik.

---

\*Silo  $F(t)$  moramo seveda zapisati z realno funkcijo.

## NALOGE

NALOGA 1. Določi vsiljeno nihanje sistema pod vplivom sile  $F(t)$  naslednjih sil, če ob času  $t = 0$  sistem miruje v ravnovesni legi ( $x = \dot{x} = 0$ ):

1. (a)  $F = F_0$ , konstanta,
2. (b)  $F = at$ ,
3. (c)  $F = F_0 \exp(-\alpha t)$ ,
4. (d)  $F = F_0 \exp(-\alpha t) \cos \beta t$ .

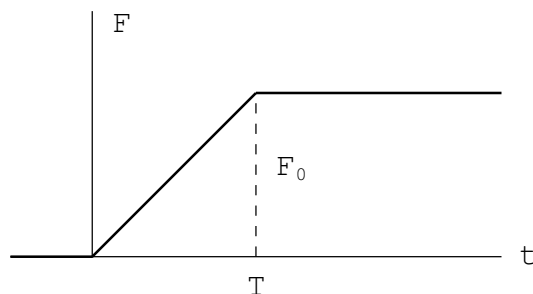
Rešitev:

1. (a)  $x = (F_0/m\omega^2)(1 - \cos \omega t)$ . Konstantna sila na nihalo vpliva tako, da zamakne njegovo ravnovesno lego, okoli katere nihalo niha.
2. (b)  $x = (a/m\omega^3)(\omega t - \sin \omega t)$ .
3. (c)  $x = [F_0/m(\omega^2 + \alpha^2)][\exp(-\alpha t) - \cos \omega t + (\alpha/\omega) \sin \omega t]$ .
4. (d)  $x = F_0\{-(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2) \cos \omega t + (\alpha/\omega)(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2) \sin \omega t + \exp(-\alpha t)[(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2) \cos \beta t - 2\alpha\beta \sin \beta t]\}/m[(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2]$ .

Zadnji primer najlažje obravnavamo, če silo zapišemo v kompleksni obliki kot

$$F = F_0 \exp[(-\alpha + i\beta)t].$$

NALOGA 2. Določi končno amplitudo nihanja sistema, na katerega deluje sila, ki je enaka nič pred  $t = 0$ , od  $t = 0$  do  $t = T$  je enaka  $F_0 t/T$ , pozneje pa je enaka  $F_0$  (slika 24). Sistem do časa  $t = 0$  miruje v ravnovesni legi.



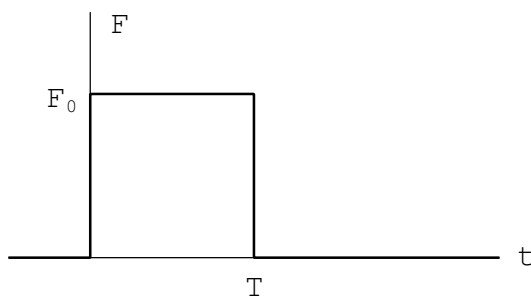
Slika 24:

Rešitev: Na intervalu  $0 < t < T$  je nihanje določeno z začetnim pogojem, dobimo  $x = (F_0/mT\omega^3)(\omega t - \sin \omega t)$ . Za  $t > T$  rešitev nastavimo v obliki

$$x = c_1 \cos \omega(t - T) + c_2 \sin \omega(t - T) + F_0/m\omega^2.$$

Ker sta funkciji  $x$  in  $\dot{x}$  ob  $t = T$  zvezni, dobimo  $c_1 = -(F_0/mT\omega^3) \sin \omega T$ ,  $c_2 = (F_0/mT\omega^3)(1 - \cos \omega T)$ . Amplituda nihanja je  $a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = (2F_0/mT\omega^3) \sin \frac{1}{2}\omega T$ . Amplituda je tem manjša, čim počasneje vključimo silo  $F_0$  (torej čim večji je  $T$ ).

NALOGA 3. Isto kot v prejšnji nalogi, tokrat za silo  $F_0$ , ki deluje le končen čas  $T$  (slika 25).



Slika 25:

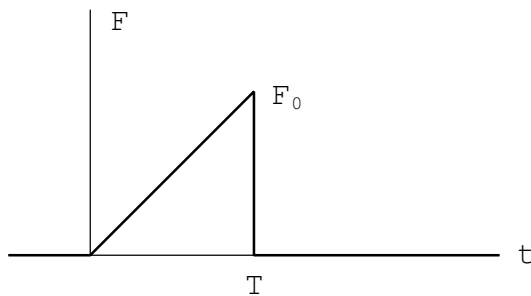
*Rešitev:* Do rešitve lahko pridemo po podobni poti kot v drugi nalogi, še lažje pa z uporabo enačbe (22.10). Za  $t > T$  sistem niha okoli  $x = 0$ . Velja

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{F_0}{m} \exp(i\omega t) \int_0^T \exp(-i\omega t) dt \\ &= \frac{F_0}{i\omega m} [1 - \exp(-i\omega T)] \exp(i\omega t).\end{aligned}$$

Iz kvadrata modula količine  $\xi$  dobimo amplitudo  $a$  s pomočjo zveze  $|\xi|^2 = a^2\omega^2$ :

$$a = (2F_0/m\omega)^2 \sin \frac{1}{2}\omega T.$$

NALOGA 4. Kot v drugi nalogi, vendar za silo  $F_0 t/T$ , ki deluje med časom  $t = 0$  in  $t = T$  (slika 26).



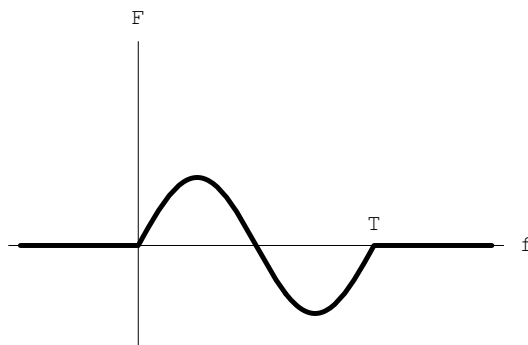
Slika 26:

*Rešitev:* Po enakem postopku dobimo

$$a = (F_0/Tm\omega^3) \sqrt{\omega^2 T^2 - 2\omega T \sin \omega T + 2(1 - \cos \omega T)}.$$

NALOGA 5. Kot v drugi nalogi, za silo  $F_0 \sin \omega t$ , ki deluje od  $t = 0$  do  $t = T \equiv 2\pi/\omega$  (slika 27).

*Rešitev:* Če v (22.10) vstavimo  $F(t) = F_0 \sin \omega t = F_0 [\exp(i\omega t) - \exp(-i\omega t)]/2i$  in integriramo od 0 do  $T$ , dobimo  $a = F_0\pi/m\omega^2$ .



Slika 27:

### §23 Nihanje sistema z več prostostnimi stopnjami

Teorija prostega nihanja sistema z  $s$  prostostnimi stopnjami je analogna teoriji za  $s = 1$  v 21.

Naj ima potencialna energija sistema  $U$  kot funkcija posplošenih koordinat  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) minimum pri  $q_i = q_{i0}$ . Vpeljemo

$$x_i = q_i - q_{i0} \quad (23.1)$$

za majhne odmike iz ravnovesja in razvijemo  $U$  po potencah  $x_i$  do kvadratnih členov. Dobljena potencialna energija je pozitivno definitna kvadratna forma

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,k} k_{ik} x_i x_k, \quad (23.2)$$

kjer smo ponovno privzeli, da je najmanjša vrednost potencialne energije enaka nič. Ker koeficienta  $k_{ik}$  in  $k_{ki}$  stojita pred isto količino  $x_i x_k$ , lahko smatramo, da sta enaka:  $k_{ik} = k_{ki}$ .

V izraz za kinetično energijo, katerega splošna oblika je  $\frac{1}{2} \sum a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k$  (glej (5.5)), postavimo  $q_i = q_{i0}$  v koeficiente  $a_{ik}$  in  $a_{ik}(q_0)$  označimo z  $m_{ik}$ . Kinetično energijo lahko tedaj zapišemo kot pozitivno definitno kvadratno formo

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k} m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k. \quad (23.3)$$

Tudi koeficiente  $m_{ik}$  lahko vedno smatramo kot simetrične:  $m_{ik} = m_{ki}$ . Lagrangevo funkcijo sistema, ki šibko niha okoli ravnovesne lege, lahko torej zapišemo kot

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik} x_i x_k). \quad (23.4)$$

Sedaj poiščimo enačbe gibanja. Ustrezne odvode bomo dobili tako, da najprej zapišemo totalni diferencial Lagrangeve funkcije:

$$dL = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{x}_i d\dot{x}_k + m_{ik} \dot{x}_k d\dot{x}_i - k_{ik} x_i dx_k - k_{ik} x_k dx_i).$$

Ker je vrednost vsote očitno neodvisna od poimenovanja indeksov, lahko v prvem in tretjem členu zamenjamo  $i$  in  $k$ . Če upoštevamo še simetrijo količin  $m_{ik}$  in  $k_{ik}$ , dobimo

$$dL = \sum (m_{ik} \dot{x}_k d\dot{x}_i - k_{ik} x_k dx_i).$$



Sledi

$$\partial L / \partial \dot{x}_i = \sum_k m_{ik} \dot{x}_k, \quad \partial L / \partial x_i = - \sum_k k_{ik} x_k.$$

Lagrangeve enačbe so torej

$$\sum_k m_{ik} \ddot{x}_k + \sum_k k_{ik} x_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (23.5)$$

in tvorijo sistem  $s$  linearnih homogenih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti.

Kot običajno bomo  $s$  neznanih funkcij  $x_k(t)$  poiskali z nastavkom

$$x_k = A_k \exp(i\omega t), \quad (23.6)$$

kjer so  $A_k$  konstante, ki jih bomo morali določiti. Nastavke (23.6) vstavimo v (23.5) in okrajšamo člen  $\exp(i\omega t)$ . Dobimo sistem linearnih homogenih algebrajskih enačb, ki jim morajo zadostiti koeficienti  $A_k$ :

$$\sum_k (-\omega^2 m_{ik} + k_{ik}) A_k = 0. \quad (23.7)$$

Sistem je rešljiv, če je determinanta koeficientov enaka nič,

$$|k_{ik} - \omega^2 m_{ik}| = 0. \quad (23.8)$$

To je *karakteristična enačba* in je  $s$ -te stopnje po spremenljivki  $\omega^2$ . V splošnem ima  $s$  različnih realnih pozitivnih korenov  $\omega_\alpha^2$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, s$ ); v nekaterih primerih lahko nekateri koreni sovpadajo. Te količine  $\omega_\alpha$  so *karakteristične* ali *lastne frekvence* sistema.

Iz fizikalnih razlogov je očitno, da so koreni enačbe (23.8) realni in pozitivni. Prisotnost imaginarnega dela pri  $\omega$  bi vodila k eksponentno naraščajočim ali upadajočim faktorjem v časovni odvisnosti koordinat  $x_k$  (23.6) in hitrosti  $\dot{x}_k$ . Takšnih faktorjev ne sme biti, saj bi se sicer skupna energija sistema  $E = U + T$  s časom spreminjala, kar bi bilo v nasprotju z zakonom o ohranitvi energije.

Do istega sklepa lahko pridemo tudi po čisto matematični poti. Enačbo (23.7) pomnožimo z  $A_i^*$  in seštejemo po  $i$ . Dobimo  $\sum (-\omega^2 m_{ik} + k_{ik}) A_i^* A_k = 0$ , od koder sledi  $\omega^2 = \sum k_{ik} A_i^* A_k / \sum m_{ik} A_i^* A_k$ . Kvadratni formi v števcu in v imenovalcu sta realni, ker so koeficienti  $k_{ik}$  in  $m_{ik}$  realni in simetrični:  $(\sum k_{ik} A_i^* A_k)^* = \sum k_{ik} A_i A_k^* = \sum k_{ki} A_i A_k^* = \sum k_{ik} A_i A_k^*$ . Formi sta poleg tega tudi pozitivno definitni, zato je  $\omega^2$  pozitiven.\*

Poznane frekvence  $\omega_\alpha$  vstavimo v enačbe (23.7) in dobimo ustrezne koeficiente  $A_k$ . Če so vsi koreni karakteristične enačbe  $\omega_\alpha$  med seboj različni, so koeficienti  $A_k$  sorazmerni z minorji determinante (23.8) z  $\omega = \omega_\alpha$ . Te minorje označimo z  $\Delta_{k\alpha}$ . Partikularna rešitev diferencialnih enačb (23.5) je torej  $x_k = \Delta_{k\alpha} C_\alpha \exp(i\omega_\alpha t)$ , kjer je  $C_\alpha$  poljubna kompleksna konstanta.

Splošna rešitev je vsota  $s$  partikularnih rešitev. Če vzamemo realni del, dobimo

$$x_k = \Re \sum_{\alpha=1}^s \Delta_{k\alpha} C_\alpha \exp(i\omega_\alpha t) \equiv \sum_{\alpha} \Delta_{k\alpha} \Theta_\alpha, \quad (23.9)$$

---

\*Da je kvadratna forma s koeficienti  $k_{ik}$  pozitivno definitna, je razvidno iz definicije (23.2) za realne vrednosti spremenljivk. Če kompleksne količine  $A_k$  eksplicitno zapišemo v obliki  $a_k + ib_k$ , zaradi simetrije koeficientov  $k_{ik}$  ponovno velja  $\sum k_{ik} A_i^* A_k = \sum k_{ik} (a_i - ib_i) \times (a_k + ib_k) = \sum k_{ik} a_i a_k + \sum k_{ik} b_i b_k$ , kar je vsota dveh pozitivno definitnih kvadratnih form.

kjer je

$$\Theta_\alpha = \Re[C_\alpha \exp(i\omega_\alpha t)]. \quad (23.10)$$

Časovni potek vsake izmed koordinat sistema je torej superpozicija  $s$  harmoničnih periodičnih nihanj  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_s$  s poljubnimi amplitudami in fazami, toda z natančno določenimi frekvencami.

Zanima nas, če si je možno izbrati takšne posplošene koordinate, da bo vsaka nihala z eno samo frekvenco. Oblika splošne rešitve (23.9) nas pripelje do rešitve. Če si  $s$  enačb (23.9) predstavljamo kot sistem enačb za  $s$  neznank  $\Theta_\alpha$ , lahko  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_s$  izrazimo s koordinatami  $x_1, x_2, \dots, x_s$ . Količine  $\Theta_\alpha$  lahko torej smatramo kot nove posplošene koordinate, imenovane *normalne koordinate*, ki opravljajo preprosta harmonična nihanja, ki jim pravimo *normalna nihanja*.

Normalne koordinate  $\Theta_\alpha$  so po definiciji rešitve enačb

$$\ddot{\Theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha = 0. \quad (23.11)$$

To pomeni, da enačbe gibanja v normalnih koordinatah tvorijo sistem  $s$  neodvisnih enačb. Pospešek vsake izmed normalnih koordinat je odvisen le od vrednosti te iste koordinate, časovni potek vsake izmed koordinat pa je povsem določen z začetno vrednostjo koordinate in ustrezne hitrosti. Z drugimi besedami, normalna nihanja sistema so povsem neodvisna med seboj.

Očitno je Lagrangeva funkcija, zapisana z normalnimi koordinatami, vsota izrazov za nihanje v eni dimenziji z eno izmed frekvenc  $\omega_\alpha$ . Lagrangeva funkcija je torej

$$L = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha (\dot{\Theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha^2), \quad (23.12)$$

kjer so  $m_\alpha$  pozitivni koeficienti. V jeziku matematike to pomeni, da smo s transformacijo (23.9) sočasno diagonalizirali obe kvadratni formi – kinetično energijo (23.3) in potencialno energijo (23.2).

Normalne koordinate običajno izberemo tako, da so koeficienti kvadratov hitrosti v Lagrangevi funkciji enaki eni polovici. To lahko dosežemo s preprosto definicijo novih normalnih koordinat

$$Q_\alpha = \sqrt{m_\alpha} \Theta_\alpha. \quad (23.13)$$

Tedaj imamo

$$L = \frac{1}{2} \sum_\alpha (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2).$$

Zgornjo razpravo moramo nekoliko popraviti, kadar nekateri koreni karakteristične enačbe sovpadajo. Splošna oblika rešitve (23.9) (23.10) se ne spremeni in ima enako število členov,  $s$ , le da koeficienti  $\Delta_{k\alpha}$ , ki ustrezajo večkratnim korenem, sedaj niso več minorji determinante, ki so v tem primeru enaki nič. \*

Vsaka večkratna (ali *degenerirana*) frekvenca ustreza številu normalnih koordinat, enakem večkratnosti, toda izbira teh koordinat ni več enolična. Normalne koordinate z enakim  $\omega_\alpha$  v kinetični in potencialni energiji nastopajo kot vsote  $\sum \dot{Q}_\alpha^2$  in  $\sum Q_\alpha^2$ , ki se transformirajo

---

\*V splošnem integralu ne more biti členov, ki vsebujejo potence časa in eksponentne faktorje, kar lahko dokažemo na podoben način kot to, da so frekvence realne: takšni členi bi namreč kršili zakon o ohranitvi energije.

na enak način, in ki jih lahko linearno transformiramo na poljuben način, ki ne spremeni teh vsot kvadratov.

Normalne koordinate zelo preprosto poiščemo za tridimenzionalno nihanje delca v konstantnem zunanem polju. Izhodišče kartezičnega koordinatnega sistema postavimo v minimum potencialne energije  $U(x, y, z)$ , to energijo razvijemo v kvadratno formo spremenljivk  $x$ ,  $y$  in  $z$ , kinetična energija  $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$  pa ni odvisna od usmerjenosti koordinatnih osi. Zadostuje torej, da s primerno izbiro koordinatnih osi diagonaliziramo potencialno energijo. Tedaj velja

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2). \quad (23.14)$$

Normalna nihanja so v smereh osi  $x$ ,  $y$  in  $z$  in imajo frekvence  $\omega_1 = \sqrt{k_1/m}$ ,  $\omega_2 = \sqrt{k_2/m}$  in  $\omega_3 = \sqrt{k_3/m}$ . V posebnem primeru centralno simetričnega polja ( $k_1 = k_2 = k_3 \equiv k$ ,  $U = \frac{1}{2}kr^2$ ) so vse tri frekvence enake (glej tretjo nalogo).

Z uporabo normalnih koordinat je možno obravnavo vsiljenega nihanja v sistemu z več kot eno prostostno stopnjo poenostaviti na več nalog vsiljenega nihanja v eni dimenziji. Lagrangeva funkcija sistema, vključno s spremenljivim zunanjim poljem, je

$$L = L_0 + \sum_k F_k(t)x_k, \quad (23.15)$$

kjer je  $L_0$  Lagrangeva funkcija za prosta nihala. Koordinate  $x_k$  nadomestimo z normalnimi koordinatami in dobimo

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (\dot{Q}_{\alpha}^2 - \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha}^2) + \sum_{\alpha} f_{\alpha}(t)Q_{\alpha}, \quad (23.16)$$

pri čemer smo vpeljali zapis

$$f_{\alpha}(t) = \sum_k F_k(t)\Delta_{k\alpha}/\sqrt{m_{\alpha}}.$$

Ustrezne enačbe gibanja

$$\ddot{Q}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha} = f_{\alpha}(t) \quad (23.17)$$

vsebujejo vsaka le po eno neznano funkcijo  $Q_{\alpha}(t)$ .

## NALOGE

**NALOGA 1.** Kakšno je nihanje sistema z dvema prostostnima stopnjama, katerega Lagrangeva funkcija je  $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}\omega_0^2(x^2 + y^2) + \alpha xy$  (imamo torej dva enaka enodimenzionalna sistema z lastno frekvenco  $\omega_0$ , ki sta sklopljena z interakcijo  $-\alpha xy$ ).

*Rešitev:* Enačbi gibanja sta  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha y$  in  $\ddot{y} + \omega_0^2 y = \alpha x$ . Z nastavkom (23.6) dobimo

$$A_x(\omega_0^2 - \omega^2) = \alpha A_y, \quad A_y(\omega_0^2 - \omega^2) = \alpha A_x. \quad (1)$$

Karakteristična enačba je  $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \alpha^2$ , od koder dobimo  $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha$ ,  $\omega_2^2 = \omega_0^2 + \alpha$ . Za  $\omega = \omega_1$  nam enačba (1) da  $A_x = A_y$ , za  $\omega = \omega_2$  pa  $A_x = -A_y$ . Zato je  $x = (Q_1 + Q_2)/\sqrt{2}$  in  $y = (Q_1 - Q_2)/\sqrt{2}$ . Koefficienta  $1/\sqrt{2}$  dobimo ob normalizaciji normalnih koordinat, tako kot v enačbi (23.13).

Če je  $\alpha \ll \omega_0^2$  (šibka sklopitev), velja  $\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{1}{2}\alpha/\omega_0$ ,  $\omega_2 \approx \omega_0 + \frac{1}{2}\alpha/\omega_0$ . Spreminjanje koordinat  $x$  in  $y$  je v tem primeru superpozicija dveh nihanj s skoraj enako frekvenco, torej utripanje s frekvenco  $\omega_2 - \omega_1 = \alpha/\omega_0$  (glej § 22). Amplituda nihanja  $y$  je najmanjša, ko je amplituda nihanja  $x$  največja in nasprotno.

NALOGA 2. Določi majhna nihanja ravninskega dvojnega nihala (slika 1, § 5).

Rešitev: Pri majhnih odmikih ( $\phi_1 \ll 1$ ,  $\phi_2 \ll 2$ ) Lagrangeva funkcija, izpeljana v prvi nalogi v § 5, postane

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\phi}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gl_1\phi_1^2 - \frac{1}{2}m_2gl_2\phi_2^2.$$

Enačbi gibanja sta

$$(m_1 + m_2)l_1\ddot{\phi}_1 + m_2l_2\ddot{\phi}_2 + (m_1 + m_2)g\phi_1 = 0, \quad l_1\ddot{\phi}_1 + l_2\ddot{\phi}_2 + g\phi_2 = 0.$$

Z nastavkom (23.6) dobimo

$$A_1(m_1 + m_2)(g - l_1\omega^2) - A_2\omega^2m_2l_2 = 0, \quad -A_1l_1\omega^2 + A_2(g - l_2\omega^2) = 0.$$

Korena karakteristične enačbe sta

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{2m_1l_1l_2} \left[ (m_1 + m_2)(l_1 + l_2) \pm \sqrt{m_1 + m_2} \sqrt{(m_1 + m_2)(l_1 + l_2)^2 - 4m_1l_1l_2} \right].$$

Ko gre  $m_1 \rightarrow \infty$ , postaneta frekvenci enaki  $\sqrt{g/l_1}$  in  $\sqrt{g/l_2}$ , kar ustreza neodvisnemu nihanju posameznega nihala.

NALOGA 3. Določi pot delca v središčno simetričnem potencialu  $U = \frac{1}{2}kr^2$  (to je *prostorsko nihalo*).

Rešitev: Tako kot pri vseh gibanjih v središčno simetričnih potencialih tudi tukaj pot leži v ravnini. Naj bo to ravnina  $xy$ . Spreminjanje vsake izmed koordinat  $x$  in  $y$  je preprosto nihanje z isto frekvenco  $\omega = \sqrt{k/m}$ :  $x = a \cos(\omega t + \alpha)$ ,  $y = b \cos(\omega t + \beta)$  ali  $x = a \cos \phi$ ,  $y = \cos(\phi + \delta) = b \cos \delta \cos \phi - b \sin \delta \sin \phi$ , kjer je  $\phi = \omega t + \alpha$ ,  $\delta = \beta - \alpha$ . Razrešimo za  $\cos \phi$  in  $\sin \phi$  in njuna kvadrata izenačimo z ena, pa dobimo enačbo poti:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \delta = \sin^2 \delta.$$

To je elipsa s središčem v izhodišču. \* Če je  $\delta = 0$  ali  $\delta = \pi$ , pot postane kar daljica.

## §24 Nihanje molekul

V interagirajočem sistemu, ki ni v zunanem polju, niso vse prostostne stopnje povezane z nihanjem. Tipičen primer so molekule. Poleg gibanj, pri katerih atomi nihajo okoli svojih ravnovesnih leg v molekuli, se lahko celotna molekula giblje premočrtno ali pa se vrtili okoli svoje osi kot celota.

Tri prostostne stopnje pripadejo prememu gibanju in v splošnem enako število tudi vrtilnemu gibanju, tako da izmed  $3n$  prostostnih stopenj  $n$ -atomske molekule,  $3n - 6$  prostostnih stopenj sodeluje v nihanju. Poseben primer so molekule, v katerih ležijo atomi na isti premici. V tem primeru obstajata le dve vrtilni prostostni stopnji (ker vrtenje okoli premice, na kateri ležijo atomi, ne spremeni ničesar), zato obstaja  $3n - 5$  nihajnih prostostnih stopenj.

\*Dejstvo, da je pot v polju s potencialno energijo  $U = \frac{1}{2}kr^2$  sklenjena krivulja, smo omenili že v § 14.

Primerno je, če se takoj rešimo premege in vrtilnega gibanja. S prvim opravimo tako, da postavimo skupno gibalno količino molekule na nič. Ker ta pogoj pomeni, da težišče molekule miruje, ga lahko izrazimo tudi z zahtevo, da se koordinate težišča ne spreminjajo s časom. Pišemo  $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_{a0} + \mathbf{u}_a$ , kjer je  $\mathbf{r}_{a0}$  krajevni vektor ravnovesnega položaja  $a$ -tega atoma in  $\mathbf{u}_a$  odmik iz te lege. Pogoj  $\sum m_a \mathbf{r}_a = \text{konst.} = \sum m_a \mathbf{r}_{a0}$  lahko zapišemo kot

$$\sum m_a \mathbf{u}_a = 0. \quad (24.1)$$

Vrtenje molekule izločimo iz obravnave tako, da postavimo vrtilno količino na nič. Ker vrtilna količina ni totalni časovni odvod kakšne funkcije koordinat, tega pogoja v splošnem ne moremo izraziti z zahtevo, da naj bo ta funkcija identično enaka nič. V primeru majhnih nihanj pa to lahko storimo. Ponovno pišemo  $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_{a0} + \mathbf{u}_a$  in zanemarimo majhne količine drugega reda premikov  $\mathbf{u}_a$ . Vrtilno količino molekule zapišemo kot

$$\mathbf{M} = \sum m_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a \cong \sum m_a \mathbf{r}_{a0} \times \dot{\mathbf{u}}_a = (d/dt) \sum m_a \mathbf{r}_{a0} \times \mathbf{u}_a.$$

V istem približku je pogoj, da je  $\mathbf{M} = 0$ , enak

$$\sum m_a \mathbf{r}_{a0} \times \mathbf{u}_a = 0, \quad (24.2)$$

pri tem pa si lahko izhodišče poljubno izberemo.

Normalna nihanja molekule lahko razvrstimo glede na gibanja atomov, če upoštevamo simetrijske lastnosti ravnovesnih leg atomov v molekuli. Obstaja splošen pristop k temu, ki temelji na teoriji grup. To bomo opisali drugje. \* Tu bomo obravnavali le nekaj osnovnih primerov.

Če vseh  $n$  atomov molekule leži v eni sami ravnini, potem lahko ločimo med normalnimi nihanji, pri katerih atomi ostanejo v ravnini, in tistimi, pri katerih to ne drži. Število nihanj vsake vrste lahko hitro ugotovimo. Pri ravninskem gibanju obstaja  $2n$  prostostnih stopenj, od katerih sta dve premi in ena vrtilna, zato je število normalnih nihanj, pri katerih atomi ostanejo v ravnini, enako  $2n - 3$ . Preostalih  $(3n - 6) - (2n - 3) = n - 3$  nihajnih prostostnih stopenj pripada nihanjem, pri katerih se atomi gibajo izven ravnine.

Pri linearnih molekulah lahko ločimo longitudinalna nihanja, pri katerih molekula ostane linearna, od nihanj, pri katerih se atomi oddaljijo od premice. Ker gibanje  $n$  delcev v eni dimenziji ustreza  $n$  prostostnim stopnjam, od katerih je ena prema, je število nihajnih načinov, pri katerih atomi ostanejo na premici, enako  $n - 1$ . Ker je skupno število nihajnih načinov linearne molekule enako  $3n - 5$ , obstaja  $2n - 4$  nihanj, pri katerih atomi zapustijo premico. Ti  $2n - 4$  nihajni načini pa imajo le  $n - 2$  različnih frekvenc, ker lahko vsako nihanje poteka v dveh med seboj pravokotnih ravninah skozi os molekule. Iz simetrijskih razlogov je očitno, da morajo takšni pari nihajnih načinov imeti iste frekvence.

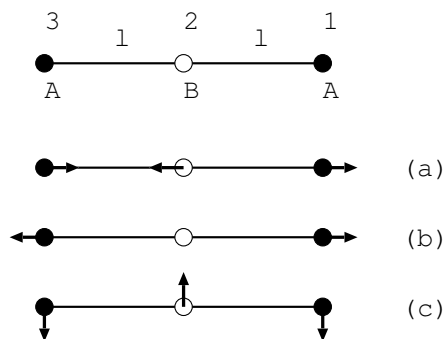
## NALOGE

†

NALOGA 1. Določi frekvence nihanj simetrične linearne triatomske molekule  $ABA$  (slika 28). Predpostavimo, da je potencialna energija molekule odvisna le od razdalj  $AB$  in  $BA$ , ter od kota  $ABA$ .

\*Glej *Kvantna mehanika*, § 100.

†Izračune nihajnih načinov bolj kompleksnih molekul lahko bralec najde v M. v. VOL'KENSHTEIN, M. A. EL'YASHEVICH in B. I. STEPANOV, *Molecular Vibrations (Kolebaniya molekul)*, Moskva, 1949; G. HERZBERG, *Molecular spectra and Molecular Structure: Infra-red and Raman Spectra of Polyatomic Molecules*, Van Nostrand, New York, 1945.



Slika 28:

*Rešitev:* Vzdolžni premiki atomov  $x_1$ ,  $x_2$  in  $x_3$  so po enačbi (24.1) povezani z  $m_A(x_1 + x_3) + m_B x_2 = 0$ . S to enačbo iz Lagrangeve funkcije za vzdolžno gibanje izločimo spremenljivko  $x_2$ :

$$L = \frac{1}{2}m_A(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{1}{2}m_B\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1[(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2],$$

in vpeljemo novi koordinati  $Q_a = x_1 + x_3$ ,  $Q_s = x_1 - x_3$ . Dobimo

$$L = \frac{\mu m_A}{4m_B}\dot{Q}_a^2 + \frac{m_A}{4}\dot{Q}_s^2 - \frac{k_1\mu^2}{4m_B^2}Q_a^2 - \frac{k_1}{4}Q_s^2,$$

kjer je  $\mu = 2m_A + m_B$  masa molekule. Vidimo, da sta  $Q_a$  in  $Q_b$  (nenormalizirani) normalni koordinati. Koordinata  $Q_a$  ustreza nihanju, ki je antisimetrično glede na središče molekule ( $x_1 = x_3$ ; slika 28a), s frekvenco  $\omega_a = \sqrt{k_1\mu/m_A m_B}$ . Koordinata  $Q_s$  ustreza simetričnemu nihanju ( $x_1 = -x_3$ ; slika 28b) s frekvenco  $\omega_{s1} = \sqrt{k_1/m_A}$ .

Prečni odmiki atomov  $y_1, y_2, y_3$  so po (24.1) in (24.2) povezani z  $m_A(y_1 + y_2) + m_B y_3 = 0$ ,  $y_1 = y_3$  (to je simetrično upogibanje molekule; slika 28c). Potencialno energijo nihanja lahko zapišemo kot  $\frac{1}{2}k_2 l^2 \delta^2$ , kjer je  $\delta$  odstopanje kota ABA od vrednosti  $\pi$ , ki je podano z odmiki kot  $\delta = [(y_1 - y_2) + (y_3 - y_2)]/l$ . Če izrazimo  $y_1, y_2, y_3$  z  $\delta$ , dobimo Lagrangevo funkcijo za prečno gibanje:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m_A(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_3^2) + \frac{1}{2}m_B\dot{y}_2^2 - \frac{1}{2}k_2 l^2 \delta^2 \\ &= \frac{m_A m_B}{4\mu} l^2 \dot{\delta}^2 - \frac{1}{2}k_2 l^2 \delta^2, \end{aligned}$$

od koder dobimo frekvenco  $\omega_{s2} = \sqrt{\frac{2k_2\mu}{m_A m_B}}$ .

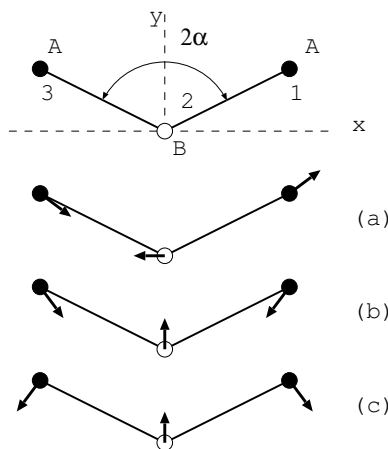
**NALOGA 2.** Kot v prvi nalogi, tokrat za molekulo ABA trikotne oblike (slika 29).

*Rešitev:* Iz enačb (24.1) in (24.2) sledi, da so komponente premikov atomov  $\mathbf{u}$  v smereh  $x$  in  $y$  povezane z

$$\begin{aligned} m_A(x_1 + x_3) + m_B x_2 &= 0, \\ m_A(y_1 + y_3) + m_B y_2 &= 0, \\ (y_1 - y_3) \sin \alpha - (x_1 + x_3) \cos \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Spremembe  $\delta l_1$  in  $\delta l_2$  razdalj  $AB$  in  $BA$  dobimo tako, da izračunamo komponente vektorjev  $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$  in  $\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2$  vzdolž teh smeri:

$$\begin{aligned} \delta l_1 &= (x_1 - x_2) \sin \alpha + (y_1 - y_2) \cos \alpha, \\ \delta l_2 &= -(x_3 - x_2) \sin \alpha + (y_3 - y_2) \cos \alpha. \end{aligned}$$



Slika 29:

Spremembo kota  $ABA$  dobimo tako, da izračunamo komponente teh vektorjev v smereh, pravokotnih na  $AB$  in  $BA$ :

$$\delta = \frac{1}{l}[(x_1 - x_2) \cos \alpha - (y_1 - y_2) \sin \alpha] + \frac{1}{l}[-(x_3 - x_2) \cos \alpha - (y_3 - y_2) \sin \alpha].$$

Lagrangeva funkcija molekule je

$$L = \frac{1}{2}m_A(\dot{\mathbf{u}}_1^2 + \dot{\mathbf{u}}_3^2) + \frac{1}{2}m_B\dot{\mathbf{u}}_2^2 - \frac{1}{2}k_1(\delta l_1^2 + \delta l_2^2) - \frac{1}{2}k_2l^2\delta^2.$$

Vpeljemo koordinate  $Q_a = x_1 + x_3$ ,  $q_{s1} = x_1 - x_3$  in  $q_{s2} = y_1 + y_3$ . Komponente vektorjev  $\mathbf{u}$  lahko zapišemo s temi koordinatami kot  $x_1 = \frac{1}{2}(Q_a + q_{s1})$ ,  $x_3 = \frac{1}{2}(Q_a - q_{s1})$ ,  $x_2 = -m_A Q_a / m_B$ ,  $y_1 = \frac{1}{2}(q_{s2} + Q_a \cot \alpha)$ ,  $y_3 = \frac{1}{2}(q_{s2} - Q_a \cot \alpha)$  in  $y_2 = -m_A q_{s2} / m_B$ . Lagrangeva funkcija ima naslednjo obliko:

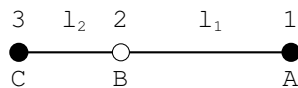
$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{4}m_A \left( \frac{2m_A}{m_B} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) \dot{Q}_a^2 + \frac{1}{4}m_A \dot{q}_{s1}^2 + \frac{\mu m_A}{4m_B} \dot{q}_{s2}^2 - \\ & - \frac{1}{4}k_1 Q_a^2 \left( \frac{2m_A}{m_B} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) \left( 1 + \frac{2m_A}{m_B} \sin^2 \alpha \right) - \\ & - \frac{1}{4}q_{s1}^2 (k_1 \sin^2 \alpha + 2k_2 \cos^2 \alpha) - \frac{1}{4}q_{s2}^2 \frac{\mu^2}{m_B^2} (k_1 \cos^2 \alpha + 2k_2 \sin^2 \alpha) + \\ & + q_{s1} q_{s2} \frac{\mu}{2m_B} (2k_2 - k_1) \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

Vidimo torej, da koordinata  $Q_a$  ustreza normalnemu nihanju, ki je antisimetrično glede na os  $y$  ( $x_1 = x_3$ ,  $y_1 = -y_3$ ; slika 29a), in ima frekvenco

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k_1}{m_A} \left( 1 + \frac{2m_A}{m_B} \sin^2 \alpha \right)}.$$

Koordinati  $q_{s1}$  in  $q_{s2}$  skupaj ustrezata dvema nihajnim načinoma, ki sta simetrična glede na os  $y$  ( $x_1 = -x_3$ ,  $y_1 = y_3$ ; slika (29)b,c), katerih frekvenci  $\omega_{s1}$  in  $\omega_{s2}$  sta podani s korenoma kvadratne karakteristične enačbe (po spremenljivki  $\omega^2$ ):

$$\omega^4 - \omega^2 \left[ \frac{k_1}{m_A} \left( 1 + \frac{2m_A}{m_B} \cos^2 \alpha \right) + \frac{2k_2}{m_A} \left( 1 + \frac{2m_A}{m_B} \sin^2 \alpha \right) \right] + \frac{2\mu k_1 k_2}{m_A^2 m_B} = 0.$$



Slika 30:

Če je  $\alpha = \pi$ , postanejo vse tri frekvence enake tistim iz prve naloge.

NALOGA 3. Kot v prvi nalogi, vendar za nesimetrično linearno molekulo  $ABC$  (slika 30).

Rešitev: Vzdolžni ( $x$ ) in prečni ( $y$ ) premiki atomov so povezani z

$$m_A x_1 + m_B x_2 + m_C x_3 = 0, \quad m_A y_1 + m_B y_2 + m_C y_3 = 0,$$

$$m_A l_1 y_1 = m_C l_2 y_3.$$

Potencialna energija raztezanja in ukrivljanja lahko zapišemo kot  $\frac{1}{2}k_1(\delta l_1)^2 + \frac{1}{2}k_1'(\delta l_2)^2 + \frac{1}{2}k_2 l^2 \delta^2$ , kjer je  $2l = l_1 + l_2$ . S podobnim izračunom kot v prvi nalogi dobimo

$$\omega_t^2 = \frac{k_2 l^2}{l_1^2 l_2^2} \left( \frac{l_1^2}{m_C} + \frac{l_2^2}{m_A} + \frac{4l^2}{m_B} \right)$$

za prečno nihanje in kvadratno enačbo (za spremenljivko  $\omega^2$ )

$$\omega^4 - \omega^2 \left[ k_1 \left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) + k_1' \left( \frac{1}{m_B} + \frac{1}{m_C} \right) \right] + \frac{\mu k_1 k_1'}{m_A m_B m_C} = 0$$

za frekvenci  $\omega_{l_1}$  in  $\omega_{l_2}$  vzdolžnega nihanja.

## §25 Dušeno nihanje

Predhodno smo tiho privzeli, da gibanje poteka v vakuumu, oziroma da lahko zanemarimo učinek okoliške snovi (medija) na gibanje. Ko se telo giba v snovi, ta zavira gibanje in ga upočasnjuje. Energija premikajočega se telesa se porazgubi (disipira) in se pretvori v toploto.

Gibanje v tem primeru ni izključno mehanski proces, upoštevati moramo tudi gibanje okoliške snovi in notranje toplotno stanje tako medija kot telesa. V splošnem ne moremo trditi, da je pospešek premikajočega se telesa odvisen le od koordinat in hitrosti ob danem trenutku, zato enačbe gibanja v mehanskem pomenu izraza ne obstajajo. Zato obravnava gibanja telesa v mediju ne spada v mehaniko.

Obstaja pa skupina primerov, v katerih lahko gibanje v snovi približno opišemo z upoštevanjem dodatnih členov v enačbah mehanskega gibanja. Med takšne primere štejemo nihanja s frekvencami, ki so majhne v primerjavi s frekvencami disipacijskih procesov v okoliški snovi. Če je ta pogoj izpolnjen, lahko smatramo, da na telo deluje sila *trenja*, ki je pri danem homogenem mediju odvisna le od hitrosti telesa.

Če je poleg tega hitrost majhna, lahko silo trenja razvijemo po potencah hitrosti. Člen ničelnega reda v tem razvoju je enak nič, saj sila trenja ne deluje na telo, ki miruje. Prvi od nič različni člen je prvega reda. Zato lahko posplošeno silo trenja  $f_{tr}$ , ki deluje na sistem, ki šibko niha v eni dimenziji, zapišemo v obliki  $f_{tr} = -\alpha \dot{x}$ , kjer je  $\alpha$  pozitiven koeficient, negativni predznak pa pomeni, da sila deluje v nasprotni smeri od hitrosti. To silo dodamo na desno stran enačbe gibanja in dobimo (glej (21.4))

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha \dot{x}. \quad (25.1)$$



Delimo z  $m$  in vpeljemo

$$k/m = \omega_0^2, \quad \alpha/m = 2\lambda; \quad (25.2)$$

$\omega_0$  je frekvenca prostega nihanja sistema v odsotnosti trenja,  $\lambda$  pa je *koefficient dušenja* ali *dekrement* \*.

Enačbo zapišemo v obliki

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (25.3)$$

Ponovno iščemo rešitev z nastavkom  $x = \exp(rt)$ . Za  $r$  dobimo karakteristično enačbo  $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$ , od koder sledi  $r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ . Splošna rešitev enačbe (25.3) je

$$x = c_1 \exp(r_1 t) + c_2 \exp(r_2 t).$$

Ločiti moramo med dvema različnima primeroma. Če je  $\lambda < \omega_0$ , imamo dve kompleksno konjugirani vrednosti za  $r$ . Splošno rešitev enačbe gibanja lahko tedaj zapišemo kot

$$x = \Re\{A \exp[-\lambda t + i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t]\},$$

kjer je  $A$  poljubna kompleksna konstanta, ali kot

$$x = a \exp(-\lambda t) \cos(\omega t + \alpha), \quad (25.4)$$

kjer je  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ ,  $a$  in  $\alpha$  pa sta realni konstanti. Gibanje, ki ga opisujeta ti formuli, je *dušeno nihanje*. Opišemo ga lahko kot harmonično nihanje z eksponentno upadajočo amplitudo. Hitrost upadanja amplitude podaja eksponent  $\lambda$ , frekvenca  $\omega$  pa je manjša od frekvence prostega nihanja v odsotnosti trenja. Za  $\lambda \ll \omega_0$  je razlika med  $\omega$  in  $\omega_0$  majhna (drugega reda). Manjša frekvenca je pričakovan rezultat, saj trenje gibanje upočasni.

Če je  $\lambda \ll \omega_0$ , se amplituda dušenega nihanja skorajda ne spremeni v nihajnem času  $2\pi/\omega$ . Zato je smiselno, da si ogleđamo povprečne vrednosti (po nihajnem času) kvadrirane koordinate in hitrosti, pri čemer pri računanju povprečja zanemarimo spremembo količine  $\exp(-\lambda t)$ . Povprečja kvadratov bodo seveda sorazmerna z  $\exp(-2\lambda t)$ . Povprečna energija sistema torej upada kot

$$\bar{E} = E_0 \exp(-2\lambda t), \quad (25.5)$$

kjer je  $E_0$  začetna vrednost energije.

Sedaj si oglejmo primer  $\lambda > \omega_0$ . Obe vrednosti  $r$  sta tedaj realni in negativni. Splošna oblika rešitve je

$$x = c_1 \exp\{-[\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}]t\} + c_2 \exp\{-[\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}]t\}. \quad (25.6)$$

V tem primeru, do katerega pride, ko je trenje dovolj močno, vrednost  $|x|$  s časom upada in sistem se asimptotično približuje ravnovesni legi. Ta način gibanja imenujemo *aperiodično dušenje*.

V posebnem primeru, ko je  $\lambda = \omega_0$ , ima karakteristična enačba dvakratni koren  $r = -\lambda$ . Splošna rešitev diferencialne enačbe je tedaj

$$x = (c_1 + c_2 t) \exp(-\lambda t). \quad (25.7)$$

To je poseben primer aperiodičnega dušenja.

\*Brezdimenzijski zmnožek  $\lambda T$ , kjer je  $T = 2\pi/\omega$  nihajni čas, se imenuje *logaritemski dekrement*.

V sistemu z več prostostnimi stopnjami so posplošene sile trenja, ki ustrezajo koordinatam  $x_i$ , linearne funkcije hitrosti. Zapišemo jih kot

$$f_{\text{tr},i} = - \sum_k \alpha_{ik} \dot{x}_k. \quad (25.8)$$

S pomočjo mehanskih argumentov ne moremo povedati nič o simetrijskih lastnostih koeficientov  $\alpha_{ik}$  glede na indeksa  $i$  in  $k$ , s postopki statistične fizike \* pa lahko pokažemo, da vedno velja

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}. \quad (25.9)$$

Zato lahko izraz (25.8) zapišemo z odvodi

$$f_{\text{tr},i} = -\partial F / \partial \dot{x}_i \quad (25.10)$$

kvadratne forme

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \alpha_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k, \quad (25.11)$$

ki se imenuje *disipacijska funkcija*.

Sile (25.10) moramo dodati na desno stran Lagrangevih enačb:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}. \quad (25.12)$$

Disipacijska funkcija ima sama po sebi pomemben fizikalen pomen: podaja hitrost disipacije energije v sistemu. To hitro preverimo, če izračunamo časovni odvod mehanske energije sistema. Dobimo

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L \right) \\ &= \sum_i \dot{x}_i \left( \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) \\ &= - \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}. \end{aligned}$$

Ker je  $F$  kvadratna funkcija hitrosti, iz Eulerjevega izreka o homogenih funkcijah sledi, da je vsota na desni strani enačbe enaka  $2F$ . Sledi

$$dE/dt = -2F, \quad (25.13)$$

torej hitrost, s katero se spreminja energija sistema, je enaka dvakratniku vrednosti disipacijske funkcije. Ker se energija pri disipacijskih procesih izgublja, velja  $F > 0$ , zato je kvadratna forma (25.11) pozitivno definitna.

Enačbe za šibko nihanje v prisotnosti trenja dobimo, če sile (25.8) dodamo na desno stran enačbe (23.5):

$$\sum_k m_{ik} \ddot{x}_k + \sum_k k_{ik} x_k = - \sum_k \alpha_{ik} \dot{x}_k. \quad (25.14)$$

---

\* Glej *Statistična fizika*, prvi del, §121.

Uporabimo nastavek  $x_k = A_k \exp(rt)$  in po krajšanju faktorja  $\exp(rt)$  dobimo sistem linearnih enačb za neznanke  $A_k$ :

$$\sum_k (m_{ik}r^2 + \alpha_{ik}r + k_{ik})A_k = 0. \quad (25.15)$$

Ko postavimo determinanto sistema na nič, dobimo karakteristično enačbo, ki določa možne vrednosti  $r$ :

$$|m_{ik}r^2 + \alpha_{ik}r + k_{ik}| = 0. \quad (25.16)$$

To je enačba za  $r$  reda 2s. Ker so vsi koeficienti realni, bodo koreni enačb realni ali pa bodo nastopali kot kompleksno konjugirani pari. Realni koreni morajo biti negativni, kompleksni pa morajo imeti negativne realne dele, sicer bi koordinate, hitrosti in energija naraščali eksponentno s časom, kar bi bilo v protislovju z dejstvom, da disipacijske sile vodijo k upadanju energije.

## §26 Vsiljeno nihanje ob prisotnosti trenja

Teorija vsiljenega nihanja v prisotnosti trenja je povsem analogna teoriji iz 22 za nihanja brez trenja. Tu si bomo bolj podrobno ogledali primer periodičnega zunanjšega polja, ki je prav posebno pomemben.

Na desno stran enačbe (25.1) dodamo zunanjo silo  $f \cos \gamma t$  in delimo z  $m$ . Dobimo enačbo gibanja

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = (f/m) \cos \gamma t. \quad (26.1)$$

To enačbo je enostavneje rešiti v kompleksni obliki, zato na desni strani  $\cos \gamma t$  nadomestimo z  $\exp(i\gamma t)$ :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = (f/m) \exp(i\gamma t).$$

Iščemo partikularno rešitev oblike  $x = B \exp(i\gamma t)$ . Za  $B$  dobimo vrednost

$$B = f/m(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma). \quad (26.2)$$

Pišemo  $B = b \exp(i\delta)$ , kjer sta

$$b = f/m\sqrt{[(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2]}, \quad \tan \delta = 2\lambda\gamma/(\gamma^2 - \omega_0^2). \quad (26.3)$$

Na koncu vzamemo realno vrednost izraza  $B \exp(i\gamma t) = b \exp[i(\gamma t + \delta)]$  in dobimo partikularni integral enačbe (26.1); prištejemo še splošno rešitev te enačbe z ničlo na desni strani (tu bodo privzeli, da je  $\omega_0 > \lambda$ ), in sledi

$$x = a \exp(-\lambda t) \cos(\omega t + \alpha) + b \cos(\gamma t + \delta). \quad (26.4)$$

Prvi člen upada eksponentno s časom, tako da po zadosti dolgem času preostane le še drugi člen:

$$x = b \cos(\gamma t + \delta). \quad (26.5)$$

Amplituda vsiljenega nihanja  $b$  (26.3) narašča, ko se  $\gamma$  približuje  $\omega_0$ , vendar ne postane neskončna kot pri resonanci brez dušenja. Pri dani amplitudi sile  $f$ , je amplituda nihanja največja, ko je  $\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$ ; če je  $\lambda \ll \omega_0$ , se ta vrednost razlikuje od  $\omega_0$  v drugem redu.

Oglejmo si območje okoli resonance, tako da postavimo  $\gamma = \omega_0 + \epsilon$ , kjer je  $\epsilon$  majhna količina, in predpostavimo, da velja  $\lambda \ll \omega_0$ . V izrazu (26.2) uporabimo približek  $\gamma^2 - \omega_0^2 = (\gamma + \omega_0)(\gamma - \omega_0) \approx 2\omega_0\epsilon$  in  $2i\lambda\gamma \approx 2i\lambda\omega_0$ , in dobimo

$$B = -f/2m(\epsilon - i\lambda)\omega_0 \quad (26.6)$$

ali

$$b = f/2m\omega_0\sqrt{\epsilon^2 + \lambda^2}, \quad \tan \delta = \lambda/\epsilon. \quad (26.7)$$

Fazna razlika  $\delta$  med nihanjem in zunanjo silo je vedno negativna, kar pomeni, da nihanje “zaostaja” za zunanjo silo. Daleč od resonance, ko je  $\gamma < \omega_0$ , gre  $\delta \rightarrow 0$ ; ko je  $\gamma > \omega_0$ , gre  $\delta \rightarrow -\pi$ . Prehod količine  $\delta$  od nič do  $-\pi$  se zgodi v ozkem frekvenčnem območju okoli  $\omega_0$  (širina je reda  $\lambda$ );  $\delta$  doseže vrednost  $-\frac{1}{2}\pi$ , ko je  $\gamma = \omega_0$ . V odsotnosti trenja se faza vsiljenega nihanja nezvezno spremeni za  $\pi$  pri  $\gamma = \omega_0$  (drugi člen v (22.4) spremeni predznak); ko je sistem dušen, se ta nezveznost razmaže.

Ko sistem opravlja ustaljeno vsiljeno nihanje, ki ga opisuje enačba (26.5), se energija sistema ne spreminja. Energijo sistem ves čas črpa iz vira zunanjega polja in jo izgublja zaradi trenja. Naj bo  $I(\gamma)$  povprečna količina energije, ki jo sistem dobi na enoto časa. Odvisna je od frekvence zunanje sile. Iz (25.13) sledi  $I(\gamma) = 2\bar{F}$ , kjer je  $\bar{F}$  povprečna vrednost disipacijske funkcije po nihanem času. Pri gibanju v eni dimenziji postane izraz za disipacijsko funkcijo (25.11) enak  $F = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 = \lambda m\dot{x}^2$ . Vstavimo (26.5) in dobimo

$$F = \lambda m b^2 \gamma^2 \sin^2(\gamma t + \delta).$$

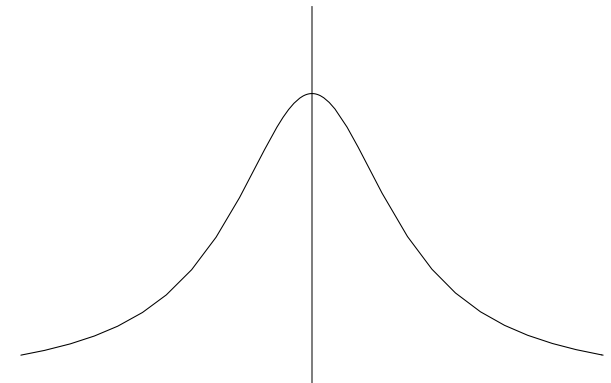
Časovno povprečje kvadrata funkcije sinus je ena polovica, zato je

$$I(\gamma) = \lambda m b^2 \gamma^2. \quad (26.8)$$

V bližini resonance je, če vstavimo amplitudo nihanja iz enačbe (26.7),

$$I(\epsilon) = f^2 \lambda / 4m (\epsilon^2 + \lambda^2). \quad (26.9)$$

Takšno frekvenčno odvisnost absorpcije imenujemo *disperzijska*. *Polovična širina* resonančne



Slika 31:

krivulje (slika 31) je vrednost  $|\epsilon|$ , pri kateri ima  $I(\epsilon)$  polovico svoje največje vrednosti ( $\epsilon = 0$ ). Iz (26.9) je razvidno, da je v našem primeru polovična širina enaka koeficientu dušenja  $\lambda$ .

Višina maksimuma  $I(0) = f^2/4m\lambda$  je obratno sorazmerna z  $\lambda$ . Z upadajočim koeficientom dušenja postaja resonančna krivulja vedno ožja. Ploščina pod krivuljo pa se ne spremeni. Podaja jo integral

$$\int_0^\infty I(\gamma) d\gamma = \int_{-\omega_0}^\infty I(\epsilon) d\epsilon.$$

Ker  $I(\epsilon)$  hitro upada z naraščajočim  $|\epsilon|$ , je območje z velikim  $|\epsilon|$  nepomembno in spodnjo integracijsko mejo lahko postavimo na  $-\infty$ , predpostavimo pa še, da je  $I(\epsilon)$  oblike (26.9). Teda je

$$\int_{-\infty}^\infty I(\epsilon) d\epsilon = \frac{f^2\lambda}{4m} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\epsilon}{\epsilon^2 + \lambda^2} = \frac{\pi f^2}{4m}. \quad (26.10)$$

## NALOGA

NALOGA Določi dušeno nihanje pod vplivom zunanega polja  $f = f_0 \exp(\alpha t) \cos \gamma t$  v prisotnosti trenja.

Rešitev: Rešimo kompleksno enačbo gibanja

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = (f_0/m) \exp(\alpha t + i\gamma t)$$

in vzamemo realni del rešitve. Dobimo dušeno nihanje naslednje oblike:

$$x = b \exp(\alpha t) \cos(\gamma t + \delta),$$

kjer je

$$b = f_0/m \sqrt{(\omega_0^2 + \alpha^2 - \gamma^2 + 2\alpha\lambda)^2 + 4\gamma^2(\alpha + \lambda)^2},$$

$$\tan \delta = -2\gamma(\alpha + \lambda)/(\omega_0^2 - \gamma^2 + \alpha^2 + 2\alpha\lambda).$$

## §27 Parametrična resonanca

V nekaterih odprtih nihajnih sistemih zunanji vplivi vodijo k časovnemu spreminjanju parametrov. \*

Parametra enodimenzionalnega sistema sta koeficienta  $m$  in  $k$  v Lagrangevi funkciji (21.3). Če sta ta časovno odvisna, se enačba gibanja glasi

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = 0. \quad (27.1)$$

Namesto  $t$  vpeljemo novo časovno spremenljivko  $\tau$ , tako da je  $d\tau = dt/m(t)$ . Enačba se tako poenostavi na

$$d^2x/d\tau^2 + mkx = 0.$$

Nič torej ne izgubimo na splošnosti, če obravnavamo enačbo gibanja oblike

$$d^2x/dt^2 + \omega^2(t)x = 0 \quad (27.2)$$

\*Preprost primer je nihalo, katerega pritrdišče se giblje periodično v navpični smeri (glej tretjo nalogo).

ki sledi iz (27.1), kadar je  $m = \text{konst.}$

Funkcija  $\omega(t)$  je podana z opisom naloge. Predpostavimo, da je ta funkcija periodična s frekvenco  $\gamma$  in nihajnim časom  $T = 2\pi/\gamma$ . To pomeni, da je  $\omega(t + T) = \omega(t)$ , tako da je enačba (27.2) invariantna na transformacijo  $t \rightarrow t + T$ . Torej če je  $x(t)$  rešitev enačbe, je rešitev tudi  $x(t + T)$ . Če sta  $x_1(t)$  in  $x_2(t)$  dva neodvisna integrala enačbe (27.2), se morata transformirati v linearno kombinacijo samih sebe, ko  $t$  nadomestimo s  $t + T$ . Možno si je izbrati \* takšni funkciji  $x_1$  in  $x_2$ , da sta ob premiku  $t \rightarrow t + T$  preprosto pomnoženi s konstanto:  $x_1(t + T) = \mu_1 x_1(t)$ ,  $x_2(t + T) = \mu_2 x_2(t)$ . Najbolj splošni funkciji, ki imata to lastnost, sta

$$x_1(t) = \mu_1^{t/T} \Pi_1(t), \quad x_2(t) = \mu_2^{t/T} \Pi_2(t), \quad (27.3)$$

kjer sta  $\Pi_1(t)$  in  $\Pi_2(t)$  periodični funkciji časa s periodo  $T$ .

Konstanti  $\mu_1$  in  $\mu_2$  v teh funkcijah morata biti povezani. Enačbi  $\ddot{x}_1 + \omega^2(t)x_1 = 0$  in  $\ddot{x}_2 + \omega^2(t)x_2 = 0$  pomnožimo z  $x_2$  in  $x_1$ , ju odštejemo in dobimo  $\ddot{x}_1 x_2 - \ddot{x}_2 x_1 = d(\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2)/dt = 0$  ali

$$\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2 = \text{konst.} \quad (27.4)$$

Za poljubni funkciji  $x_1(t)$  in  $x_2(t)$  oblike (27.3) se izraz na levi strani (27.4) pomnoži z  $\mu_1 \mu_2$ , ko  $t$  nadomestimo z  $t + T$ . Od tod sledi, da mora veljati

$$\mu_1 \mu_2 = 1, \quad (27.5)$$

če naj velja enačba (27.4).

Več o konstantah  $\mu_1$  in  $\mu_2$  izvemo upoštevajoč dejstvo, da so koeficienti v enačbi (27.2) realni. Če je  $x(t)$  integral takšne enačbe, potem je tudi  $x^*(t)$  integral. To pomeni, da morata  $\mu_1, \mu_2$  biti enaka  $\mu_1^*, \mu_2^*$ , torej mora veljati  $\mu_1 = \mu_2^*$  ali pa morata biti  $\mu_1$  in  $\mu_2$  oba realna. V prvem primeru iz enačbe (27.5) sledi  $\mu_1 = 1/\mu_1^*$ , torej  $|\mu_1|^2 = |\mu_2|^2 = 1$ : konstanti  $\mu_1$  in  $\mu_2$  imata modul ena.

V drugem primeru sta neodvisna integrala enačbe (27.2)

$$x_1(t) = \mu^{t/T} \Pi_1(t), \quad x_2(t) = \mu^{-t/T} \Pi_2(t), \quad (27.6)$$

kjer je  $\mu$  pozitivno ali negativno realno število ( $|\mu| \neq 1$ ). Ena izmed funkcij ( $x_1$  oziroma  $x_2$ , glede na to, ali je  $|\mu| > 1$  oziroma  $|\mu| < 1$ ) narašča eksponentno s časom. To pomeni, da je sistem, ki miruje v izhodišču ( $x = 0$ ) nestabilen: vsak poljubno majhen odmik iz tega stanja vodi k hitro naraščajočem odkliku  $x$ : ta pojav se imenuje *parametrična resonanca*.

Upoštevati moramo, da kadar sta začetni vrednosti  $x$  in  $\dot{x}$  enaki točno nič, tudi ostaneta enaki nič, v nasprotju z dogajanjem pri običajni resonanci (22), pri kateri odmik narašča s časom (sorazmerno s  $t$ ) tudi v primeru začetnih vrednosti nič.

Oglejmo si pogoje za parametrično resonanco v pomembnem primeru, kjer se funkcija  $\omega(t)$  le malo razlikuje od konstantne vrednosti  $\omega_0$  in je preprosta periodična funkcija:

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + h \cos \gamma t), \quad (27.7)$$

kjer je konstanta  $h \ll 1$ ; predpostavili bomo, da je  $h > 0$ , kar lahko vedno dosežemo s primerno izbiro izhodišča za merjenje časa. Kot bomo videli, je parametrična resonanca največja, ko

---

\*Ta izbira je ekvivalentna diagonalizaciji matrike linearne transformacije funkcij  $x_1$  in  $x_2$ , pri čemer moramo rešiti ustrezno kvadratno sekularno enačbo. Tu bomo predpostavili, da korena te enačbe nista enaka.

je frekvenca funkcije  $\omega(t)$  skoraj dvakratnik frekvence  $\omega_0$ . Zato pišemo  $\gamma = 2\omega_0 + \epsilon$ , kjer je  $\epsilon \ll \omega_0$ .

Rešitev enačbe gibanja \*

$$\ddot{x} + \omega_0^2[1 + h \cos(2\omega_0 + \epsilon)t]x = 0 \quad (27.8)$$

lahko poiščemo z nastavkom

$$x = a(t) \cos\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon\right)t + b(t) \sin\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon\right)t, \quad (27.9)$$

kjer sta  $a(t)$  in  $b(t)$  funkciji, ki se s časom spreminjata počasi v primerjavi s trigonometrijskima faktorjema. Ta oblika rešitve seveda ni točna. V resnici funkcija  $x(t)$  vsebuje člene s frekvencami, ki se od  $\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon$  razlikujejo za celoštevilске večkratnike frekvence  $2\omega_0 + \epsilon$ ; ti členi pa so višjega reda po  $h$  in jih lahko v prvem približku zanemarimo.

Izraz (27.9) vstavimo v (27.8) in obdržimo člene prvega reda po  $\epsilon$ , pri čemer predpostavimo, da je  $\dot{a} \sim \epsilon a$  in  $\dot{b} \sim \epsilon b$ . Utemeljenost tega približka v bližini resonance bo potrdil rezultat. Zmnožek trigonometrijskih funkcij lahko nadomestimo z vsoto

$$\cos\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon\right)t \cdot \cos(2\omega_0 + \epsilon)t = \frac{1}{2} \cos 3\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon\right)t + \frac{1}{2} \cos\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon\right)t,$$

ipd., in upoštevajoč predhodne ugotovitve zanemarimo člene s frekvenco  $3(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)$ . Rezultat je

$$-\left(2\dot{a} + b\epsilon + \frac{1}{2}h\omega_0\dot{b}\right)\omega_0 \sin\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon\right)t + \left(2\dot{b} - a\epsilon + \frac{1}{2}h\omega_0\dot{a}\right)\omega_0 \cos\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon\right)t = 0.$$

Enačba je lahko izpolnjena, če sta koeficienta funkcij sinus in kosinus enaka nič. Tako dobimo dve linearni diferencialni enačbi za funkciji  $a(t)$  in  $b(t)$ . Kot običajno bomo poiskali rešitev sorazmerno z  $\exp(st)$ . Tedaj mora veljati  $sa + \frac{1}{2}(\epsilon + \frac{1}{2}h\omega_0)b = 0$  in  $\frac{1}{2}(\epsilon - \frac{1}{2}h\omega_0)a - sb = 0$ . Enačbi sta rešljivi, če je

$$s^2 = \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{1}{2}h\omega_0 \right)^2 - \epsilon^2 \right]. \quad (27.10)$$

Pogoj za parametrično resonanco je, da je  $s$  realen, torej da je  $s^2 > 0$ . † Do parametrične resonance zato pride na območju

$$-\frac{1}{2}h\omega_0 < \epsilon < \frac{1}{2}h\omega_0 \quad (27.11)$$

na obeh straneh frekvence  $\omega_0$ . ‡ Širina območja je sorazmerna s  $h$ , vrednosti koeficienta ojačitve nihanj  $s$  v tem območju pa prav tako.

Do parametrične resonance pride tudi takrat, ko je frekvenca  $\gamma$ , s katero niha parameter, blizu katerekoli vrednosti  $2\omega_0/n$ , kjer je  $n$  celo število. Širina resonančnega območja (območje

\*Enačba te oblike (s poljubnima  $\gamma$  in  $h$ ) se v matematični fiziki imenuje *Mathieujeva enačba*.

†Konstanta  $\mu$  v (27.6) je z  $s$  povezana preko zveze  $\mu = -\exp(s\pi/\omega_0)$ ; če  $t$  nadomestimo z  $t + 2\pi/2\omega_0$ , sinus in kosinus v (27.9) spremenita predznak.

‡Če nas zanima le območje resonance, ne pa vrednosti  $s$  na tem območju, lahko izračun poenostavimo, saj je na mejah območja  $s = 0$ , torej sta koeficienta  $a$  in  $b$  v (27.9) konstanti. Na ta način takoj dobimo  $\epsilon = \pm \frac{1}{2}h\omega_0$  kot v (27.11).

nestabilnosti) pa hitro upada z naraščajočim  $n$ , in sicer kot  $h^n$  (glej opombo v drugi nalogi). Amplituda koeficienta ojačitve tudi upada z  $n$ .

Pojav parametrične oscilacije preživi v prisotnosti manjšega trenja, toda območje nestabilnosti se zoži. Kot smo videli v 25, vodi trenje k upadanju amplitude nihanja kot  $\exp(-\lambda t)$ . Zato je ojačitev nihanja pri parametrični resonanci  $\exp[(s - \lambda)t]$ , kjer je  $s$  pozitivna rešitev naloge v odsotnosti trenja, meje območja nestabilnosti pa dobimo iz enačbe  $s - \lambda = 0$ . Zato je namesto (27.11) območje nestabilnosti

$$-\sqrt{\left[\left(\frac{1}{2}h\omega_0\right)^2 - 4\lambda^2\right]} < \epsilon < \sqrt{\left[\left(\frac{1}{2}h\omega_0\right)^2 - 4\lambda^2\right]}. \quad (27.12)$$

Vidimo, da do resonance sedaj pride le, če je  $h$  večji od neke "mejne" vrednosti  $h_k$ . Ko velja (27.12), je  $h_k = 4\lambda/\omega_0$ . Pokažemo lahko, da je za resonanco pri frekvenci  $2\omega_0/n$  mejna vrednosti  $h_k$  sorazmerna z  $\lambda^{(1/n)}$ , torej da narašča z  $n$ .

## NALOGE

NALOGA 1. Določi območje nestabilnosti za resonanco v bližini  $\gamma = 2\omega_0$  do drugega reda po  $h^2$  natančno.

Rešitev: Iščemo rešitev enačbe (27.8) naslednje oblike:

$$x = a_0 \cos(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)t + b_0 \sin(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)t + a_1 \cos 3(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)t + b_1 \sin 3(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)t.$$

V tem izrazu imamo tudi člene, ki so za en red po  $h$  višji od tistih v (27.9). Ker nas zanimajo le meje območja nestabilnosti, lahko koeficiente  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $a_1$  in  $b_1$  smatramo kot konstante (glej zadnjo opombo pod črto). Izraz vstavimo v (27.8), zmnožke kotnih funkcij pretvorimo v vsote in v našem približku izpustimo člene s frekvenco  $5(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)$ . Dobimo

$$\begin{aligned} & \left[ -a_0 \left( \omega_0 \epsilon + \frac{1}{4} \epsilon^2 \right) + \frac{1}{2} h \omega_0^2 a_0 + \frac{1}{2} h \omega_0^2 a_1 \right] \cos(\omega_0 + \frac{1}{2} \epsilon)t + \\ & + \left[ -b_0 \left( \omega_0 \epsilon + \frac{1}{4} \epsilon^2 \right) - \frac{1}{2} h \omega_0^2 b_0 + \frac{1}{2} h \omega_0^2 b_1 \right] \sin(\omega_0 + \frac{1}{2} \epsilon)t + \\ & + \left[ \frac{1}{2} h \omega_0^2 a_0 - 8 \omega_0^2 a_1 \right] \cos 3(\omega_0 + \frac{1}{2} \epsilon)t + \\ & + \left[ \frac{1}{2} h \omega_0^2 b_0 - 8 \omega_0^2 b_1 \right] \sin 3(\omega_0 + \frac{1}{2} \epsilon)t = 0. \end{aligned}$$

V členih s frekvenco  $\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon$  obdržimo člene drugega reda, v členih s frekvenco  $3(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)$  pa le člene prvega reda. Vsak izmed izrazov znotraj oglatih oklepajev mora biti enak nič. Iz zadnjih dveh dobimo  $a_1 = ha_0/16$  in  $b_1 = hb_0/16$ , iz prvih dveh pa nato dobimo  $\omega_0 \epsilon \pm \frac{1}{2} h \omega_0^2 + \frac{1}{4} \epsilon^2 - h^2 \omega_0^2 / 32 = 0$ .

Enačbo rešimo do členov drugega reda natančno, in dobimo iskane meje količine  $\epsilon$ :

$$\epsilon = \pm \frac{1}{2} h \omega_0 - h^2 \omega_0 / 32.$$

NALOGA 2. Določi meje območja nestabilnosti resonance pri  $\gamma = \omega_0$ .



Rešitev: Postavimo  $\gamma = \omega_0 + \epsilon$  in dobimo enačbo gibanja

$$\ddot{x} + \omega_0^2[1 + h \cos(\omega_0 + \epsilon)t]x = 0.$$

Iskana vrednost  $\epsilon$  je drugega reda po  $h$ , zato uporabimo nastavek

$$x = a_0 \cos(\omega_0 + \epsilon)t + b_0 \sin(\omega_0 + \epsilon)t + a_1 \cos 2(\omega_0 + \epsilon)t + b_1 \sin 2(\omega_0 + \epsilon)t + c_1,$$

ki vsebuje člene prvih dveh velikostnih redov. Meje območja nestabilnosti ponovno določimo tako, da koeficiente smatramo kot konstante. Dobimo

$$\begin{aligned} & \left[ -2\omega_0\epsilon a_0 + \frac{1}{2}h\omega_0^2 a_1 + h\omega_0^2 c_1 \right] \cos(\omega_0 + \epsilon)t + \\ & + \left[ -2\omega_0\epsilon b_0 + \frac{1}{2}h\omega_0^2 b_1 \right] \sin(\omega_0 + \epsilon)t + \\ & + \left[ -3\omega_0^2 a_1 + \frac{1}{2}h\omega_0^2 a_0 \right] \cos 2(\omega_0 + \epsilon)t + \\ & + \left[ -3\omega_0^2 b_1 + \frac{1}{2}h\omega_0^2 b_0 \right] \sin 2(\omega_0 + \epsilon)t + [c_1\omega_0^2 + \frac{1}{2}h\omega_0^2 a_0] = 0. \end{aligned}$$

Od tod dobimo  $a_1 = ha_0/6$ ,  $b_1 = hb_0/6$  in  $c_1 = -\frac{1}{2}ha_0$ , meji pa sta določeni z  $\epsilon = -5h^2\omega_0/24$ ,  $\epsilon = h^2\omega_0/24$ . \*

NALOGA 3. Določi pogoje za parametrično resonanco pri majhnem nihanju nihala, katerega pritrdišče niha v navpični smeri.

Rešitev: Lagrangevo funkcijo smo izpeljali v tretji nalogi (c) v § 5. Za majhna nihanja ( $\phi \ll 1$ ) se enačba gibanja glasi  $\ddot{\phi} + \omega_0^2[1 + (4a/l)\cos(2\omega_0 + \epsilon)t]\phi = 0$ , kjer je  $\omega_0^2 = g/l$ . Vlogo parametra  $h$  igra tu količina  $4a/l$ . Iz pogoja (27.11) tako na primer dobimo  $|\epsilon| < 2a\sqrt{g/l^3}$ .

## §28 Neharmonično nihanje

Teorija majhnih nihanj, ki smo jo obravnavali do zdaj, temelji na razvoju potencialne in kinetične energije sistema po koordinatah in hitrostih, pri čemer smo obdržali člene do drugega reda. Enačbe gibanja so tedaj linearne, zato v tem približku govorimo o *linearnem nihanju*. Čeprav je takšen razvoj smiseln, ko je amplituda nihanja zadosti majhna, se v višjih redih približka (ki se imenujejo *neharmonična* ali *nelinearna nihanja*) pojavijo manjše, vendar kvalitativno drugačne lastnosti gibanja.

Oglejmo si razvoj Lagrangeve funkcije do tretjega reda. V potencialni energiji se pojavijo členi tretjega reda po koordinatah  $x_i$ , v kinetični energiji pa členi, ki vsebujejo hitrosti in koordinate oblike  $\dot{x}_i\dot{x}_kx_l$ . Ta razlika v primerjavi s prejšnjim izrazom (23.3) nastane, ker ohranimo člene, ki so linearni v  $x$  v razvoju funkcij  $a_{ik}(q)$ . Lagrangeva funkcija je torej oblike

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k - k_{ik}x_ix_k) + \frac{1}{2} \sum_{i,k,l} n_{ikl}\dot{x}_i\dot{x}_kx_l - \frac{1}{3} \sum_{i,k,l} l_{ikl}x_ix_kx_l, \quad (28.1)$$

\*V splošnem je meja  $\Delta\epsilon$  območja nestabilnosti resonance v bližini frekvence  $2\omega_0/n$  podana z

$$\Delta\epsilon = n^{2n-3}h^n\omega_0/2^{3(n-1)}[(n-1)!]^2,$$

kar je pokazal M. Bell (*Proceedings of Glasgow Mathematical Association* **3**, 132, 1957).

kjer so  $n_{ikl}$  in  $l_{ikl}$  novi konstantni koeficienti.

Če se preselimo iz koordinat  $x_i$  v normalne koordinate linearnega približka,  $Q_\alpha$ , potem bosta zaradi linearnosti preslikave tretja in četrta vsota v (28.1) postali vsoti z  $Q_\alpha$  in  $\dot{Q}_\alpha$  namesto koordinat  $x_i$  in hitrosti  $\dot{x}_i$ . Koeficiente v teh novih vsota označimo z  $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$  in  $\gamma_{\alpha\beta\gamma}$ . Lagrangeva funkcija se tedaj zapiše kot

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \lambda_{\alpha\beta\gamma} \dot{Q}_\alpha \dot{Q}_\beta Q_\gamma - \frac{1}{3} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \mu_{\alpha\beta\gamma} Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma. \quad (28.2)$$

Enačb gibanja, ki sledijo iz te Lagrangeve funkcije, ne bomo zapisali. Njihova pomembna lastnost je, da so oblike

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(Q, \dot{Q}, \ddot{Q}), \quad (28.3)$$

kjer so  $f_\alpha$  homogene funkcije druge stopnje koordinat  $Q$  in njihovih časovnih odvodov.

Z metodo zaporednih približkov iščemo rešitev teh enačb oblike

$$Q_\alpha = Q_\alpha^{(1)} + Q_\alpha^{(2)}, \quad (28.4)$$

kjer je  $Q_\alpha^{(2)} \ll Q_\alpha^{(1)}$ , funkcije  $Q_\alpha^{(1)}$  pa so rešitve "nemoteni" enačb  $\ddot{Q}_\alpha^{(1)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(1)} = 0$ , ki so torej navadne harmonične enačbe z rešitvami

$$Q_\alpha^{(1)} = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \alpha_\alpha). \quad (28.5)$$

V naslednjem približku obdržimo na desni strani (28.3) le člene drugega reda. Za funkcije  $Q_\alpha^{(2)}$  dobimo enačbe

$$\ddot{Q}_\alpha^{(2)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(2)} = f_\alpha(Q^{(1)}, \dot{Q}^{(1)}, \ddot{Q}^{(1)}), \quad (28.6)$$

kjer v desno stran vstavimo (28.5). Dobimo sistem nehomogenih linearnih diferencialnih enačb, v katerih lahko desne strani zapišemo kot vsote preprostih periodičnih funkcij. Na primer

$$\begin{aligned} Q_\alpha^{(1)} Q_\beta^{(1)} &= a_\alpha a_\beta \cos(\omega_\alpha t + \alpha_\alpha) \cos(\omega_\beta t + \alpha_\beta) \\ &= \frac{1}{2} a_\alpha a_\beta \{ \cos[(\omega_\alpha + \omega_\beta)t + \alpha_\alpha + \alpha_\beta] + \cos[(\omega_\alpha - \omega_\beta)t + \alpha_\alpha - \alpha_\beta] \}. \end{aligned}$$

Desne strani enačb (28.6) vsebujejo člene, ki ustrezajo nihanjem s frekvencami, ki so vsote in razlike lastnih frekvenc sistema. Rešitve teh enačb moramo poiskati v obliki, ki vsebuje podobne periodične faktorje. Tako pridemo do sklepa, da dobimo v drugem približku dodatna nihanja s frekvencami

$$\omega_\alpha \pm \omega_\beta, \quad (28.7)$$

vklučno z dvojnimi frekvencami  $2\omega_\alpha$  in s frekvenco nič (to je konstantni odmik). To so *sestavljene frekvence*. Ustrezne amplitude so sorazmerne z zmnožki  $a_\alpha a_\beta$  (ali s kvadrati  $a_\alpha^2$ ) ustreznih normalnih amplitud.

V višjih približkih, ko upoštevamo tudi dodatne člene v razvoju Lagrangeve funkcije, se pojavijo sestavljene frekvence, ki so vsote in razlike več kot dveh  $\omega_\alpha$ ; pojavi pa se tudi dodatni pojav. V tretjem približku so nekatere izmed sestavljenih frekvenc enake prvotnim frekvencam  $\omega_\alpha$  ( $= \omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_\beta$ ). Ko uporabimo zgoraj opisani postopek, desne strani enačb vsebujejo resonančne člene, ki vodijo k členom v rešitvi, katerih amplituda narašča s časom. Iz fizikalnih razlogov je očitno, da velikost nihanj ne more naraščati sama od sebe v izoliranem sistemu brez zunanega vira energije.

V resnici osnovne frekvence  $\omega_\alpha$  v višjih približkih niso natanko enake njihovim “nemotnim” vrednostim  $\omega_\alpha^{(0)}$ , ki nastopajo v kvadratnem izrazu za potencialno energijo. Naraščajoče člene v rešitvi dobimo iz razvoja oblike

$$\cos(\omega_\alpha^{(0)} + \Delta\omega_\alpha)t \approx \cos \omega_\alpha^{(0)}t - t\Delta\omega_\alpha \sin \omega_\alpha^{(0)}t,$$

ki očitno ne velja, ko je  $t$  zadosti velik.

V višjih redih približka moramo torej metodo zaporednih približkov popraviti tako, da bodo periodični faktorji vsebovali točne namesto približnih frekvenc. Iskane spremembe frekvenc dobimo, če rešimo enačbe in zahtevamo, da resonančnih členov ne sme biti.

Postopek lahko predstavimo na primeru neharmoničnega nihanja v eni dimenziji. Lagranjevo funkcijo zapišemo v obliki

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 - \frac{1}{3}m\alpha x^3 - \frac{1}{4}m\beta x^4. \quad (28.8)$$

Ustrezna enačba gibanja je

$$\ddot{x} + \omega_0^2x = -\alpha x^2 - \beta x^3. \quad (28.9)$$

Rešitev bomo iskali kot vrsto zaporednih približkov:  $x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}$ , kjer je

$$x^{(1)} = a \cos \omega t, \quad (28.10)$$

s točno vrednostjo frekvence  $\omega$ , ki jo prav tako razvijemo kot  $\omega = \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \dots$  (Začetno fazo v  $x^{(1)}$  lahko vedno postavimo na nič s primerno izbiro izhodišča za merjenje časa.) Enačbe gibanja oblike (28.9) niso najbolj primerne: ko (28.10) vstavimo v (28.9), leva stran ni enaka natančno nič. Zato raje zapišemo

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\ddot{x} + \omega_0^2x = -\alpha x^2 - \beta x^3 - \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\ddot{x}. \quad (28.11)$$

Vstavimo  $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ ,  $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)}$  in opustimo člene, ki so manjši od drugega reda. Za  $x^{(2)}$  dobimo enačbo

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2x^{(2)} &= -\alpha a^2 \cos^2 \omega t + 2\omega_0\omega^{(1)}a \cos \omega t \\ &= -\frac{1}{2}\alpha a^2 - \frac{1}{2}\alpha a^2 \cos 2\omega t + 2\omega_0\omega^{(1)}a \cos \omega t. \end{aligned}$$

Pogoj, da ni resonančnega člena na desni strani enačbe, je kar  $\omega^{(1)} = 0$ , v skladu z drugim približkom, ki smo ga opisali na začetku tega razdelka. Nehomogeno linearno enačbo rešimo po običajni poti in dobimo

$$x^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2} \cos 2\omega t. \quad (28.12)$$

V (28.11) vstavimo  $x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}$  in  $\omega = \omega_0 + \omega^{(2)}$  in dobimo enačbo za  $x^{(3)}$ :

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2x^{(3)} = -2\alpha x^{(1)}x^{(2)} - \beta x^{(1)3} + 2\omega_0\omega^{(2)}x^{(1)}.$$

Na desni vstavimo (28.10) ter (28.12), in opravimo preprosto transformacijo. Sledi

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2x^{(3)} &= a^3 \left[ \frac{1}{4}\beta - \frac{\alpha^2}{6\omega_0^2} \right] \cos 3\omega t + \\ &+ a \left[ 2\omega_0\omega^{(2)} + \frac{5a^2\alpha^2}{6\omega_0^2} - \frac{3}{4}a^2\beta \right] \cos \omega t. \end{aligned}$$

Koeficient resonančnega člena  $\cos \omega t$  mora biti enak nič. Tako dobimo popravek k osnovni frekvenci, ki je sorazmeren s kvadratom amplitude nihanja:

$$\omega^{(2)} = \left( \frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3} \right) a^2. \quad (28.13)$$

Sestavljeno nihanje tretjega reda je

$$x^{(3)} = \frac{a^3}{16\omega_0^2} \left( \frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} - \frac{1}{2}\beta \right) \cos 3\omega t. \quad (28.14)$$

## §29 Resonanca pri nelinearnem nihanju

Ko pri vsiljenem nihanju upoštevamo neharmonične člene dobi pojav resonance nove lastnosti.

Na desno stran enačbe (28.9) dodamo zunanjo periodično silo s frekvenco  $\gamma$  in dobimo

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = (f/m) \cos \gamma t - \alpha x^2 - \beta x^3; \quad (29.1)$$

dodali smo tudi silo trenja s koeficientom dušitve  $\lambda$  (ki naj bo majhen). Ko imamo v enačbi za prosto nihanje nelinearne člene, bi strogo vzeto morali prišteti tudi člene višjega reda amplitude zunanje sile, ki jih dobimo, če je sila vzbujanja odvisna od odmika  $x$ . Te člene bomo izpustili, da bodo enačbe bolj pregledne; na kvalitativne rezultate členi ne vplivajo.

Naj bo  $\gamma = \omega_0 + \epsilon$ , kjer je  $\epsilon$  majhen. To pomeni, da je  $\gamma$  blizu resonančne vrednosti. Nastalo gibanje lahko preučimo tudi brez obravnave enačbe (29.1). V linearnem približku je v bližini resonance amplituda  $b$  kot funkcija amplitude  $f$  in frekvence  $\gamma$  zunanje sile podana z (26.7), kar zapišemo v obliki

$$b^2(\epsilon^2 + \lambda^2) = f^2/4m^2\omega_0^2. \quad (29.2)$$

Nelinearnost nihanja vodi k odvisnosti lastne frekvence od amplitude, kar zapišemo kot

$$\omega_0 + \kappa b^2, \quad (29.3)$$

konstanta  $\kappa$  pa je neka funkcija neharmoničnih koeficientov (glej (28.13)). V enačbi (29.2) zato nadomestimo  $\omega_0$  z  $\omega_0 + \kappa b^2$  (bolj natančno, to nadomestitev opravimo v majhni razliki  $\epsilon = \gamma - \omega_0$ ). Dobljena enačba se glasi

$$b^2[(\epsilon - \kappa b^2)^2 + \lambda^2] = f^2/4m^2\omega_0^2 \quad (29.4)$$

ali

$$\epsilon = \kappa b^2 \pm \sqrt{[(f/2m\omega_0 b)^2 - \lambda^2]}.$$

Enačba (29.4) je kubična enačba spremenljivke  $b^2$  in njene realne rešitve podajajo amplitudo vsiljenega nihanja. Oglejmo si, kako je ta amplituda odvisna od frekvence zunanje sile pri dani amplitudi  $f$  te sile.

Ko je amplituda  $f$  dovolj majhna, je tudi  $b$  majhna, zato lahko potence količine  $b$  višje od druge v (29.4) zanemarimo in dobimo  $b(\epsilon)$  iz (29.2), ki je simetrična krivulja z maksimumom v točki  $\epsilon = 0$  (slika 32a). Ko se  $f$  poveča ima krivulja drugačno obliko, vendar ima na začetku še vedno en sam maksimum, ki se premakne proti pozitivnim  $\epsilon$ , če je  $\kappa > 0$  (slika 32b). V tem primeru ima (29.4) eno samo realno rešitev za  $b$ .

Ko  $f$  doseže neko vrednost  $f_k$  (ki jo bomo določili spodaj), pa se značilnosti krivulje spremenijo. Ko je  $f > f_k$ , obstaja območje frekvenc, pri katerih ima enačba (29.4) tri realne korene, ki ustrezajo območju  $BCDE$  na sliki 32c.

Meje tega območja dobimo iz pogoja  $db/d\epsilon = \infty$ , ki velja v točkah  $D$  in  $C$ . Enačbo (29.4) odvajamo po  $\epsilon$  in dobimo

$$db/d\epsilon = (-\epsilon b + \kappa b^3)/(\epsilon^2 + \lambda^2 - 4\kappa\epsilon b^2 + 3\kappa^2 b^4).$$

Točki  $D$  in  $C$  dobimo torej kot sočasno rešitev enačb

$$\epsilon^2 - 4\kappa b^2 \epsilon + 3\kappa^2 b^4 + \lambda^2 = 0 \quad (29.5)$$

in (29.4). Ustrezni vrednosti  $\epsilon$  sta obe pozitivni. Največjo amplitudo dosežemo, ko je  $db/d\epsilon = 0$ . Tako dobimo  $\epsilon = \kappa b^2$ , iz (29.4) pa sledi

$$b_{\max} = f/2m\omega_0\lambda; \quad (29.6)$$

kar je isto kot največja vrednost, ki jo dobimo iz (29.2).

Pokazati se da (tega tu ne bomo storili \*), da izmed treh korenov enačbe (29.4) sredinski (ki ga predstavlja črtkana krivulja  $CD$  na sliki 32c) ustreza nestabilnemu nihanju sistema: poljubno majhna motnja na sistem v takšen stanju bo povzročila, da se bo sistem gibal v skladu z največjim ali najmanjšim korenem enačbe ( $BC$  ali  $DE$ ). Zato le veji  $ABC$  in  $DEF$  ustrezata dejanskim nihanjem sistema. Zanimivo je, da imamo območje frekvenc, na katerem sta možni dve različni amplitudi nihanja. Ko frekvenco zunanje sile povečujemo, se amplituda nihala povečuje po krivulji  $ABC$ . V točki  $C$  je amplituda nezvezna in naglo pade na vrednost, ki ustreza točki  $E$ , in se potem zmanjšuje po krivulji  $EF$ , ko nadaljujemo s povečevanjem frekvence. Če nato frekvenco zmanjšamo, se bo amplituda nihanja spreminjala po krivulji  $F$ , v točki  $D$  pa se bo nezvezno povečala na vrednost v točki  $B$ , nato pa bo upadala po krivulji  $BA$ .

Vrednost  $f_k$  izračunamo tako, da upoštevamo, da je to tista vrednost  $f$ , pri kateri sta dva korena  $b^2$  kvadratne enačbe (29.5) enaka; ko je  $f = f_k$  je odsek  $CD$  prevojna točka. Diskriminanto enačbe (29.5) postavimo na nič in dobimo  $\epsilon^2 = 3\lambda^2$ , ustrezen dvojni koren pa je  $\kappa b^2 = 2\epsilon/3$ . Ti vrednosti za  $b$  in  $\epsilon$  vstavimo v (29.4) in dobimo

$$f_k = 32m^2\omega_0^2\lambda^3/3\sqrt{3}|\kappa|. \quad (29.7)$$

Poleg drugačnega obnašanja resonance pri frekvenci  $\gamma \approx \omega_0$  prinese nelinearnost nihanja tudi nove resonance, pri katerih se nihanja s frekvenco blizu  $\omega_0$  vzbudijo zaradi zunanje sile, katere frekvenca je daleč stran od  $\omega_0$ .

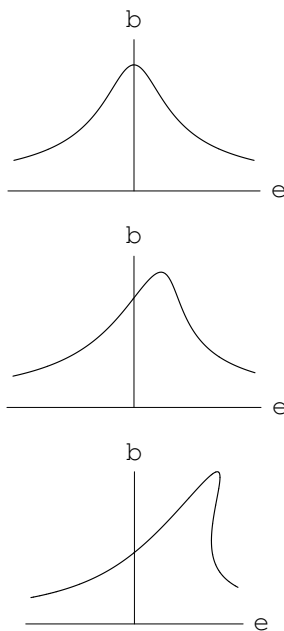
Naj bo frekvenca zunanje sile  $\gamma \approx \frac{1}{2}\omega_0$ , torej  $\gamma = \frac{1}{2}\omega_0 + \epsilon$ . V prvem (linearnem) približku ta sila povzroči nihanja z enako frekvenco in z amplitudo, ki je sorazmerna s silo:

$$x^{(1)} = (4f/3m\omega_0^2) \cos(\frac{1}{2}\omega_0 + \epsilon)t,$$

glej (22.4). Ko upoštevamo še nelinearne člene (drugi približek), ta nihanja vodijo k členom s frekvenco  $2\gamma \approx \omega_0$  na desni strani enačbe gibanja (29.1). Funkcijo  $x^{(1)}$  vstavimo v enačbo

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -\alpha x^{(1)2},$$

\*Dokaz lahko najdemo na primer v N. N. Bogoliubov, Y. A. Mitropolsky, *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations*, Hindustan Publishing Corporation, Delhi 1961.



Slika 32:

uporabimo izrek o produktu trigonometrijskih funkcij in na desni obdržimo resonančni člen. Tako dobimo

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -(8\alpha f^2/9m^2\omega_0^4) \cos(\omega_0 + 2\epsilon)t. \quad (29.8)$$

Ta enačba se od (29.1) razlikuje le po tem, da v njej namesto amplitude sile  $f$  nastopa izraz, ki je sorazmeren z  $f^2$ . To pomeni, da je dobljena resonanca podobna zgornji za frekvence  $\gamma \approx \omega_0$ , vendar je šibkejša. Funkcijo  $b(\epsilon)$  dobimo tako, da v (29.4) nadomestimo  $f$  z  $-8\alpha f^2/9m\omega_0^4$  in  $\epsilon$  z  $2\epsilon$ :

$$b^2[(2\epsilon - \kappa b^2)^2 + \lambda^2] = 16\alpha^2 f^4/81m^4\omega_0^{10}. \quad (29.9)$$

Sedaj naj bo frekvenca zunanje sile  $\gamma = 2\omega_0 + \epsilon$ . V prvem približku imamo  $x^{(1)} = -(f/3m\omega_0^2) \cos(2\omega_0 + \epsilon)t$ . Ko v enačbo (29.1) vstavimo  $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ , ne dobimo členov, ki bi predstavljali zunanjo silo, ki je v resonanci, tako kot v predhodnem primeru. Zato pa dobimo parametrično resonanco, do katere pride zaradi člena tretjega reda, ki je sorazmeren s produktom  $x^{(1)}x^{(2)}$ . Če izmed vseh nelinearnih členov obdržimo le tega, se enačba za  $x^{(2)}$  glasi

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -2\alpha x^{(1)}x^{(2)}$$

ali

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 \left[ 1 - \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^4} \cos(2\omega_0 + \epsilon)t \right] x^{(2)} = 0, \quad (29.10)$$

in je podobna enačbi (27.8) (le da vsebuje še trenje), kar vodi, kot smo že pokazali, k nestabilnosti nihanja v nekem frekvenčnem območju.

Ta enačba pa ne zadostuje, da bi lahko določili amplitudo nihanja. Končno vrednost amplitude dobimo le, če v enačbo vključimo tudi nelinearne učinke, kar storimo tako, da

dodamo nelinearne člene količine  $x^{(2)}$ :

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = (2\alpha f/3m\omega_0^2)x^{(2)} \cos(2\omega_0 + \epsilon)t. \quad (29.11)$$

Nalogo si lahko občutno poenostavimo, če upoštevamo naslednje dejstvo. Na desno stran (29.11) vstavimo  $x^{(2)} = b \cos[(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)t + \delta]$ , kjer je  $b$  iskana amplituda resonančnega nihanja,  $\delta$  pa konstantna fazna razlika, ki v nadaljevanju ni pomembna. Nato zapišemo produkt kosinusov kot vsoto in dobimo člen  $(\alpha f b/3m\omega_0^2) \cos[(\omega_0 + \frac{1}{2}\epsilon)t - \delta]$ , ki je običajen resonančni člen (glede na lastno frekvenco sistema  $\omega_0$ ). Naloga se tako poenostavi na nalogo, ki smo ga obravnavali na začetku tega razdelka, namreč na primer običajne resonance nelinearnega sistema, edina razlika je ta, da amplitudo zunanje sile tu predstavlja količina  $\alpha f b/3\omega_0^2$ , namesto  $\epsilon$  pa imamo  $\frac{1}{2}\epsilon$ . Te popravke vnesemo v enačbo (29.4) in dobimo

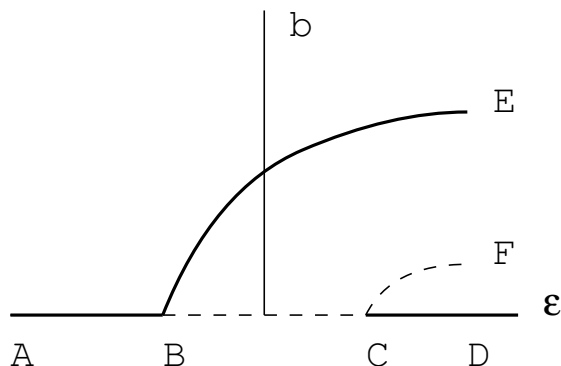
$$b^2[(\frac{1}{2}\epsilon - \kappa b^2)^2 + \lambda^2] = \alpha^2 f^2 b^2 / 36m^2 \omega_0^6.$$

Amplituda  $b$  ima lahko naslednje vrednosti:

$$b = 0, \quad (29.12)$$

$$b^2 = \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{1}{2}\epsilon + \sqrt{(\alpha f/6m\omega_0^3)^2 - \lambda^2} \right], \quad (29.13)$$

$$b^2 = \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{1}{2}\epsilon - \sqrt{(\alpha f/6m\omega_0^3)^2 - \lambda^2} \right], \quad (29.14)$$



Slika 33:

Slika 33 prikazuje dobljeno odvisnost  $b$  od  $\epsilon$  za  $\kappa > 0$ ; ustrezne krivulje za  $\kappa < 0$  so zrcalne slike teh krivulj glede na os  $b$ . Točki  $B$  in  $C$  ustrežata vrednostim  $\epsilon = \pm \sqrt{(\alpha f/3m\omega_0^3)^2 - 4\lambda^2}$ . Levo od točke  $B$  je edina možna vrednost  $b = 0$ , tam torej ni resonance in nihanja s frekvenco blizu  $\omega_0$  niso vzbujena. Med  $B$  in  $C$  obstajata dve rešitvi  $b = 0$  ( $BC$ ) in (29.13) ( $BE$ ). Desno od  $C$  imamo tri rešitve (29.12)-(29.14). Vse dobljene rešitve pa niso stabilne. Vrednost  $b = 0$  ni stabilna na  $BC$ , \* pokažemo pa lahko tudi, da je sredinska vrednost (29.14) vedno nestabilna. Nestabilne vrednosti  $b$  so na sliki 33 prikazane s črtkanimi črtami.

\*Ta daljica ustreza območju parametrične resonance (27.12) in s primerjavo med (29.10) in (27.8) dobimo  $|h| = 2\alpha f/3m\omega_0^4$ . Pogoji  $|2\alpha f/3m\omega_0^3| > 4\lambda$ , ki je potreben za resonanco, zahteva, da je  $h > h_k$ .

Oglejmo si na primer obnašanje sistema, ki na začetku “miruje”, \* ko frekvenco zunanje sile počasi zmanjšujemo. Dokler ne dosežemo točke  $C$ , je  $b = 0$ , v točki  $C$  pa sistem nezvezno preskoči na vejo  $EB$ . Ko  $\epsilon$  še zmanjšamo, upade amplituda nihanja na nič v točki  $B$ . Ko frekvenco ponovno povečujemo, amplituda narašča po  $BE$ . †

Zgoraj opisani pojavi resonance so pri nelinearnih nihajnih sistemih najpomembnejši. V višjih približkih do resonance pride tudi pri drugih frekvencah. Strogo vzeto pride do resonance pri vsaki frekvenci  $\gamma$ , za katero velja  $n\gamma + m\omega_0 = \omega_0$  s celoštevilskima  $n$  in  $m$ , torej za vsako frekvenco  $\gamma = p\omega_0/q$ , kjer sta  $p$  in  $q$  celi števili. Pri višjih redih približka pa sta moč resonance in frekvenčno območje, na katerem do nje pride, vedno manjša, tako da lahko dejansko izmerimo resonance le pri frekvencah  $\gamma \approx p\omega_0/q$ , kjer sta  $p$  in  $q$  majhni števili.

## NALOGA

NALOGA Določi funkcijo  $b(\epsilon)$  za resonanco v bližini frekvence  $\gamma \approx 3\omega_0$ .

Rešitev: V prvem približku je  $x^{(1)} = -(f/8m\omega_0^2) \cos(3\omega_0 + \epsilon)t$ . Enačbo za drugi približek dobimo iz (29.1):

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -3\beta x^{(1)}x^{(2)2},$$

pri čemer smo na desni strani enačbe obdržali le tisti člen, ki vodi k resonanci. Nastavimo  $x^{(2)} = b \cos[(\omega_0 + \frac{1}{3}\epsilon)t + \delta]$ , zmnožek treh funkcij kosinus preoblikujemo s pravili iz trigonometrije in obdržimo le resonančni člen. Na desni strani enačbe tako dobimo izraz

$$(3\beta b^2 f / 32m\omega_0^2) \cos[(\omega_0 + \frac{1}{3}\epsilon)t - 2\delta].$$

Od tod je razvidno, da dobimo  $b(\epsilon)$  tako, da  $f$  nadomestimo z  $3\beta b^2 f / 32m\omega_0^2$  in  $\epsilon$  v  $\frac{1}{3}\epsilon$  v (29.4):

$$b^2 [(\frac{1}{3}\epsilon - \kappa b^2)^2 + \lambda^2] = (9\beta^2 f^2 / 2^{12} m^2 \omega_0^6) b^4 \equiv Ab^4.$$

Koreni te enačbe so

$$b = 0, \quad b^2 = \frac{\epsilon}{3\kappa} + \frac{A}{2\kappa^2} \pm \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\epsilon A}{3\kappa} + \frac{A^2}{4\kappa^2} - \lambda^2}.$$

Na sliki 34 je prikazana funkcija  $b(\epsilon)$  za primer, ko je  $\kappa > 0$ . Stabilnemu območju ustreza le vrednost  $b = 0$  (os  $\epsilon$ ) in velja  $AB$ . Točka  $A$  ustreza vrednostim  $\epsilon_k = 3(4\kappa^2\lambda^2 - A^2)/4\kappa A$ ,  $b_k^2 = (4\kappa^2\lambda^2 + A^2)/4\kappa^2 A$ . Sistem niha le, če je  $\epsilon > \epsilon_k$  in  $b > b_k$ . Ker je stanje  $b = 0$  vedno stabilno, moramo sistem na začetku malo “poriniti”, da vzbudimo nihanje.

Zgoraj zapisane enačbe veljajo le za majhne  $\epsilon$ . Ta pogoj je izpolnjen, če je  $\lambda$  majhna in če je amplituda sile takšna, da velja  $\kappa\lambda^2/\omega_0 \ll A \ll \kappa\omega_0$ .

## §30 Gibanje v hitro nihajočem polju

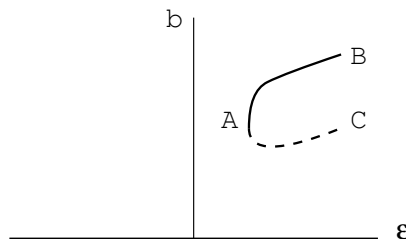
Oglejmo si gibanje delca, na katerega deluje časovno neodvisna sila potenciala  $U$  in sila

$$f = f_1 \cos \omega t + f_2 \sin \omega t, \quad (30.1)$$

\*Spomnimo se, da tu obravnavamo le resonančne pojave. Če resonance ni, sistem vseeno ne miruje, temveč je podvržen vsiljenemu nihanju s frekvenco  $\gamma$ .

†Upoštevati moramo, da vse tukaj izpeljane enačbe veljajo le, če je amplituda  $b$  (ter  $\epsilon$ ) zadosti majhna. V resnici se krivulji  $BE$  in  $CF$  srečata in v stičišču se nihanje ustavi; od tam naprej je  $b = 0$ .





Slika 34:

ki se s časom spreminja z zelo visoko frekvenco  $\omega$  ( $f_1$  in  $f_2$  sta odvisni le od koordinat). “Visoka” frekvenca je takšna, da zanjo velja  $\omega \gg 1/T$ , kjer je  $T$  velikostni red periode gibanja, ki bi ga delec imel, če bi se nahajal samo v polju  $U$ . Velikost sil  $f$  ni nujno majhna v primerjavi s silami zaradi polja  $U$ , predpostavili pa bomo, da je nihanje delca (ki ga označimo z  $\xi$ ) zaradi dodatnih sil majhno.

Račune bomo poenostavili tako, da si bomo ogledali gibanje v eni dimenziji v polju, ki je odvisno samo od prostorske koordinate  $x$ . Enačba gibanja se tedaj glasi \*

$$m\ddot{x} = -dU/dx + f. \quad (30.2)$$

Zaradi narave polja, v katerem se delec giblje, je očitno, da bo potoval po gladki poti, okoli katere bo sočasno nihalo z majhno amplitudo s frekvenco  $\omega$ . Zato funkcijo  $x(t)$  zapišemo kot vsoto

$$x(t) = X(t) + \xi(t), \quad (30.3)$$

kjer  $\xi(t)$  predstavlja majhno nihanje.

Povprečna vrednost funkcije  $\xi(t)$  po njeni periodi  $2\pi/\omega$  je nič in v tem času se  $X(t)$  le malo spremeni. Računanje povprečja označimo s črtico. Zapišemo lahko  $\bar{x} = \bar{X}(t)$ , torej  $\bar{X}(t)$  predstavlja “gladko” (povprečno) gibanje delca. Izpeljali bomo enačbo za  $\bar{X}(t)$ . †

V (30.2) vstavimo (30.3) in razvijemo po potencah  $\xi$  do členov prvega reda. Dobimo

$$m\ddot{\bar{X}} + m\ddot{\xi} = -\frac{dU}{dx} - \xi \frac{d^2U}{dx^2} + f(X, t) + \xi \frac{\partial f}{\partial X}. \quad (30.4)$$

Enačba vsebuje tako nihajoče kot gladke člene, ki jih moramo ločeno izenačiti. Za nihajoče člene velja enačba

$$m\ddot{\xi} = f(X, t); \quad (30.5)$$

ostali členi vsebujejo majhen faktor  $\xi$  in so zato količine višjega reda (odvod  $\ddot{\xi}$  je sorazmeren z veliko količino  $\omega^2$  in zato ni majhen). Enačbo (30.5) integriramo upoštevajoč funkcijo  $f$  iz (30.1) ( $X$  smatramo kot konstanto), pa dobimo

$$\xi = -f/m\omega^2. \quad (30.6)$$

Nato izračunamo povprečje enačbe (30.4) po času (na način, ki smo ga opisali zgoraj). Ker so povprečne vrednosti prvih potenc  $f$  in  $\xi$  enake nič, se rezultat glasi

$$m\ddot{\bar{X}} = -\frac{dU}{dX} + \xi \frac{\partial f}{\partial X} = -\frac{dU}{dX} - \frac{1}{m\omega^2} f \frac{\partial f}{\partial x}.$$

\*Koordinata  $x$  ni nujno kartezična koordinata, zato koeficient  $m$  ni nujno masa delca, niti ne rabi biti konstantna, kot smo privzeli v (30.2). Ta predpostavka konstantnosti pa ne vpliva na končni rezultat (glej še zadnjo opombo v tem razdelku).

†Pristop, ki ga bomo tu ubrali, je iznašel P. L. KAPITZA (1951).

V enačbi nastopa samo funkcija  $X(t)$ , zato jo lahko zapišemo kot

$$m\ddot{X} = -dU_{\text{ef}}/dX, \quad (30.7)$$

kjer je "efektivna potencialna energija" definirana kot \*

$$U_{\text{ef}} = U + \overline{f^2}/2m\omega^2 = U + (f_1^2 + f_2^2)/4m\omega^2. \quad (30.8)$$

To primerjamo z (30.6) in hitro ugotovimo, da je člen, ki smo ga dodali k  $U$  kar povprečna kinetična energija nihajočega gibanja:

$$U_{\text{ef}} = U + \frac{1}{2}m\overline{\dot{\xi}^2}. \quad (30.9)$$

Povprečno gibanje delca je torej takšno, kot da bi konstantnemu potencialu  $U$  dodali konstantno količino, ki je sorazmerna s kvadratom amplitude spremenljivega polja.

Rezultat lahko preprosto posplošimo na primer sistema s poljubnim številom prostostnih stopenj, opisanim s posplošenimi koordinatami  $q_i$ . Efektivna potencialna energija tedaj ni (30.8), temveč

$$U_{\text{ef}} = U + \frac{1}{2\omega^2} \sum_{i,k} a^{-1}_{ik} \overline{f_i f_k} = U + \sum_{i,k} \frac{1}{2} a_{ik} \overline{\dot{\xi}_i \dot{\xi}_k}, \quad (30.10)$$

kjer so količine  $a^{-1}_{ik}$ , ki so v splošnem funkcije koordinat, elementi matrike, ki je obrat matrike koeficientov  $a_{ik}$  kinetične energije (5.5) sistema.

## NALOGI

**NALOGA 1.** Določi lego stabilnega ravnovesja nihala, katerega pritrdišče niha v navpični smeri z visoko frekvenco  $\gamma$  ( $\gamma \gg \sqrt{g/l}$ ).

*Rešitev:* Iz Lagrangeve funkcije, ki smo jo izpeljali v tretji nalogi v § 5, je razvidno, da je v tem primeru spremenljiva sila enaka  $f = -mla\gamma^2 \cos \gamma t \sin \phi$  (količina  $x$  tukaj predstavlja kot  $\phi$ ). "Efektivna potencialna energija" je torej  $U_{\text{eff}} = mgl[-\cos \phi + (a^2\gamma^2/4gl)\sin^2 \phi]$ . Lega stabilnega ravnovesja ustrezajo minimumom te funkcije. Lega navpično navzdol ( $\phi = 0$ ) je vedno stabilna, če pa velja pogoj  $a^2\gamma^2 > 2gl$ , je stabilna tudi lega navpično navzgor ( $\phi = \pi$ ).

**NALOGA 2.** Kot v prvi nalogi, tokrat za nihalo, katerega pritrdišče niha v vodoravni smeri.

*Rešitev:* Iz Lagrangeve funkcije, izpeljave v nalogi 3(b), § 5, dobimo  $f = mla\gamma^2 \cos \gamma t \cos \phi$ , od tod pa  $U_{\text{eff}} = mgl[-\cos \phi + (a^2\gamma^2/4gl)\cos^2 \phi]$ . Če je  $a^2\gamma^2 < 2gl$ , je lega  $\phi = 0$  stabilna. Če pa je  $a^2\gamma^2 > 2gl$ , je lega stabilnega ravnovesja podana z enačbo  $\cos \phi = 2gl/a^2\gamma^2$ .

---

\*Z nekoliko daljšim izračunom lahko pokažemo, da enačbi (30.7) in (30.8) veljata tudi, če je  $m$  funkcija koordinate  $x$ .

## Poglavje 6

# Gibanje togega telesa

### §31 Kotna hitrost

V mehaniki je *togo telo* sistem delcev, katerih medsebojne razdalje se ne spreminjajo. Ta pogoj je pri telesih, ki dejansko obstajajo v naravi, izpolnjen le približno. Vseeno pa se večina trdnih teles pri običajnih pogojih deformira tako malo, da lahko spremembe oblike in velikosti povsem zanemarimo, ko obravnavamo gibanje telesa kot celote.

V nadaljevanju bomo pogosto poenostavili izpeljave tako, da bomo telo smatrali kot diskretno množico točk. To nikakor ni v nasprotju s trditvijo, da lahko toga telesa v mehaniki obravnavamo kot kontinue in zanemarimo njihovo notranjo strukturo. V enačbah lahko seštevanje po diskretni množici točk nadomestimo z integriranjem po prostornini (zveznega) telesa, tako da maso vsake točke nadomestimo z maso  $\rho dV$ , ki se nahaja v diferencialni prostornini  $dV$  ( $\rho$  je gostota).

Pri opisu togega telesa bomo uporabljali dva koordinatna sistema: “nepremičen” (torej inercialen) sistem  $XYZ$  in gibljiv sistem  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ , ki je togo pritrjen na telo in se giblje skupaj z njim. Izhodišče gibljivega sistema je smiselno postaviti v težišče telesa.

Položaj telesa glede na nepremični sistem je povsem določen, če poznamo položaj gibljivega sistema. Naj ima izhodišče gibljivega sistema  $O$  krajevni vektor  $\mathbf{R}$  (slika 35). Usmerjenost osi gibljivega sistema glede na nepremičnega podajajo trije neodvisni vektorji, ki skupaj s tremi komponentami vektorja  $\mathbf{R}$  tvorijo šest koordinat. Zato je togo telo mehanski sistem s šestimi prostostnimi stopnjami.

Oglejmo si poljuben infinitezimalen premik togega telesa. Zapišemo ga lahko kot vsoto dveh prispevkov. Prvi je infinitezimalen premočrtni premik telesa, pri katerem se težišče telesa premakne v svoj končni položaj, usmerjenost osi gibljivega sistema pa se ne spremeni. Drugi prispevek je infinitezimalen zasuk okoli težišča, pri kateri se še ostale točke premaknejo v svoje končne položaje.

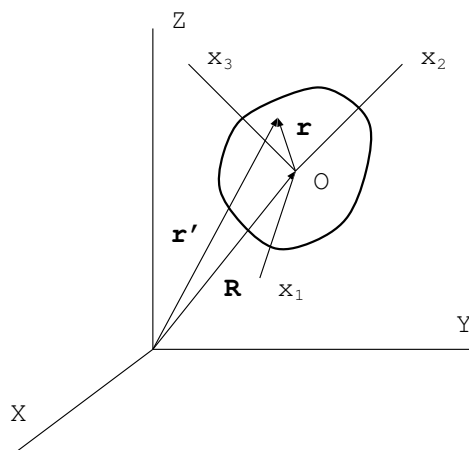
Naj bo  $\mathbf{r}$  krajevni vektor poljubne točke  $P$  togega telesa v gibljivem sistemu,  $\mathbf{r}$  pa krajevni vektor iste točke v nepremičnem sistemu (slika 35). Infinitezimalni premik  $d\mathbf{r}$  točke  $P$  je sestavljen iz premika  $d\mathbf{R}$ , ki je enak premiku težišča, in premika  $d\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{r}$  glede na težišče, ki je posledica zasuka za infinitezimalen kot  $d\phi$  (glej (9.1)):  $d\mathbf{r} = d\mathbf{R} + d\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{r}$ . Enačbo delimo s trajanjem premika  $dt$ , vpeljemo \*

$$d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}, \quad d\mathbf{R}/dt = \mathbf{V}, \quad d\boldsymbol{\phi}/dt = \boldsymbol{\Omega}, \quad (31.1)$$

\*Da ne bo nesporazuma, moramo poudariti, da je ta način zapisa kotne hitrosti nekoliko poljuben: vektor  $\delta\Phi$  obstaja le za infinitezimalne zasuke, ne pa tudi za vse končne zasuke.

in dobimo izraz

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}. \quad (31.2)$$



Slika 35:

Vektor  $\mathbf{V}$  je vektor hitrosti težišča telesa in je enak *premočrtni (translacijski) hitrosti* telesa. Vektor  $\boldsymbol{\Omega}$  se imenuje *kotna hitrost* vrtenja telesa; njegova smer, tako kot smer vektorja  $d\phi$ , je vzdolž osi vrtenja. Zgornja enačba pomeni, da lahko hitrost  $\mathbf{v}$  poljubne točke telesa glede na nepremični koordinatni sistem zapišemo s premočrtno hitrostjo telesa in njegovo kotno hitrostjo vrtenja.

Poudariti moramo, da pri izpeljavi enačbe (31.2) nismo uporabili dejstva, da smo izhodišče postavili v težišče. Prednost te izbire po postala razvidna, ko bomo računali energijo telesa, ki se giblje.

Sedaj predpostavimo, da izhodišče gibljivega koordinatnega sistema ni v težišču  $O$ , temveč v neki točki  $O'$ , ki je od  $O$  oddaljena za  $\mathbf{a}$ . Naj bo hitrost točke  $O'$   $\mathbf{V}'$ , kotna hitrost novega koordinatnega sistema pa  $\boldsymbol{\Omega}'$ . Ponovno si oglejmo gibanje neke točke telesa  $P$  in označimo z  $\mathbf{r}'$  njen krajevni vektor glede na  $O'$ . Tedaj je  $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$ . To vstavimo v (31.2) in dobimo  $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'$ . Iz definicije količin  $\mathbf{V}'$  in  $\boldsymbol{\Omega}'$  dobimo  $\mathbf{v} = \mathbf{V}' + \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{r}'$ . S primerjavo obeh izrazov dobimo

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}, \quad \boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\Omega}. \quad (31.3)$$

Druga enačba je zelo pomembna. Pove, da je kotna hitrost vrtenja gibljivega koordinatnega sistema (ob poljubnem trenutku) neodvisna od izbire koordinatnega sistema. Vsi gibljivi sistemi se vrtijo s kotnimi hitrostmi  $\boldsymbol{\Omega}$ , ki so po velikosti enake in med seboj vzporedne. Zato lahko  $\boldsymbol{\Omega}$  imenujemo *kotna hitrost telesa*. Hitrost premege gibanja pa nima takšne "absolutne" lastnosti.

Iz prve enačbe (31.3) je razvidno, da kadar sta v danem trenutku  $\mathbf{V}$  in  $\boldsymbol{\Omega}$  pravokotna pri neki izbiri izhodišča  $O$ , sta tudi  $\mathbf{V}'$  in  $\boldsymbol{\Omega}'$  pravokotna po poljubni izbiri drugega izhodišča  $O'$ . Formula (31.2) nam v tem primeru pove, da so hitrosti  $\mathbf{v}$  vseh točk telesa pravokotne na  $\boldsymbol{\Omega}$ . Zato si lahko vedno \* izberemo izhodišče  $O'$ , katerega hitrost  $\mathbf{V}'$  je enaka nič in gibanje telesa v danem trenutku je čisto vrtenje okoli osi skozi  $O'$ . Ta os se imenuje *trenutna os vrtenja*. †

\*  $O'$  lahko seveda leži izven telesa.

† V splošnem, ko  $\mathbf{V}$  in  $\boldsymbol{\Omega}$  nista pravokotna, si lahko izhodišče izberemo tako, da sta  $\mathbf{V}$  in  $\boldsymbol{\Omega}$  vzporedna, kar

V nadaljevanju bo izhodišče gibljivega sistema vedno vezano na težišče telesa, tako da bo os vrtenja potekala skozi težišče. V splošnem se med gibanjem spreminjata tako velikost kot smer vektorja  $\Omega$ .

## §32 Vztrajnostni tenzor

Pri računanju kinetične energije togega telesa bomo smatrali, da je sestavljeno iz diskretnih delcev, tako da je  $T = \sum \frac{1}{2}mv^2$ , kjer seštevamo po vseh delcih telesa. Tukaj in v nadaljevanju bomo poenostavili zapis in izpuščali indeks, ki označuje posamezne delce.

Vstavimo (31.2) in dobimo

$$T = \sum \frac{1}{2}m(\mathbf{V} + \Omega \times \mathbf{r})^2 = \sum \frac{1}{2}mV^2 + \sum m\mathbf{V} \cdot \Omega \times \mathbf{r} + \sum \frac{1}{2}m(\Omega \times \mathbf{r})^2.$$

Hitrosti  $\mathbf{V}$  in  $\Omega$  sta enaki za vsako točko telesa. V prvem členu lahko zato izpostavimo  $\frac{1}{2}V^2$ ,  $\sum m$  pa je kar masa telesa, ki jo označimo z  $\mu$ . Drugi člen je  $\sum m\mathbf{V} \cdot \Omega \times \mathbf{r} = \sum m\mathbf{r} \cdot \mathbf{V} \times \Omega = \mathbf{V} \times \Omega \cdot \sum m\mathbf{r}$ . Ker je izhodišče gibljivega sistema v težišču, je ta člen enak nič, saj je  $\sum m\mathbf{r} = 0$ . V tretjem členu razvijemo kvadrat vektorskega produkta. Rezultat je

$$T = \frac{1}{2}\mu V^2 + \frac{1}{2} \sum m[\Omega^2 r^2 - (\Omega \cdot \mathbf{r})^2]. \quad (32.1)$$

Kinetično energijo togega telesa lahko zapišemo kot vsoto dveh prispevkov. Prvi člen v (32.1) je kinetična energija premega gibanja in je enaka, kot če bi bila vsa masa telesa zbrana v težišču. Drugi člen je kinetična energija vrtenja s kotno hitrostjo  $\Omega$  okoli osi, ki poteka skozi težišče. Poudariti moramo, da je takšna delitev kinetične energije na dva dela mogoča le zato, ker smo izhodišče koordinatnega sistema, ki se giblje skupaj s telesom, postavili v težišče.

Kinetično energijo vrtenja lahko zapišemo v tenzorski obliki s komponentami  $x_i$  in  $\Omega_i$  vektorjev  $\mathbf{r}$  in  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum m(\Omega_i^2 x_l^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k) \\ &= \frac{1}{2} \sum m(\Omega_i \Omega_k \delta_{ik} x_l^2 - \Omega_i \Omega_k x_i x_k) \\ &= \frac{1}{2} \Omega_i \Omega_k \sum m(x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k). \end{aligned}$$

Uporabili smo identiteto  $\Omega_i = \delta_{ik} \Omega_k$ , kjer je  $\delta_{ik}$  enotski tenzor, katerega komponente so enake ena, če je  $i = k$ , in nič, če je  $i \neq k$ . S tenzorjem

$$I_{ik} = \sum m(x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k) \quad (32.2)$$

pomeni, da je gibanje sestavljeno (v izbranem trenutku) iz vrtenja okoli neke osi in premočrtnega gibanja v smeri te iste osi.

\*V tem poglavju črke  $i, k, l$  označujejo tenzorske indekse in zavzamejo vrednosti 1, 2, 3. Ves čas bo veljal dogovor o seštevanju, kar pomeni, da znakov za vsoto ne pišemo, izraze pa vedno (implicitno) seštejemo po vrednostih 1, 2, 3 vsakokrat, ko se nek indeks pojavi dvakrat v enačbi. Takšen indeks bomo imenovali *nemi indeks*. Na primer  $A_i B_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ,  $A_i^2 = A_i A_i = \mathbf{A}^2$ , in tako naprej. Neme indekse smemo vedno zamenjati z drugimi nemimi indeksi, razen s tistimi, ki v enačbi že nastopajo.

lahko končno zapišemo izraz za kinetično energijo togega telesa:

$$T = \frac{1}{2}\mu V^2 + \frac{1}{2}I_{ik}\Omega_i\Omega_k. \quad (32.3)$$

Lagrangevo funkcijo togega telesa dobimo iz (32.3), če odštejemo potencialno energijo:

$$L = \frac{1}{2}\mu V^2 + \frac{1}{2}I_{ik}\Omega_i\Omega_k - U. \quad (32.4)$$

Potencialna energija je v splošnem funkcija šestih spremenljivk, ki določajo položaj togega telesa. To so tri koordinate  $X, Y, Z$  težišča in trije koti, ki določajo smeri gibljivih koordinatnih osi glede na nepremične.

Tenzor  $I_{ik}$  se imenuje *vztrajnostni tenzor* telesa in je simetričen:

$$I_{ik} = I_{ki}, \quad (32.5)$$

kar je razvidno iz definicije (32.2). Zapišimo njegove komponente tudi eksplicitno:

$$I_{ik} = \begin{bmatrix} \sum m(y^2 + z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2 + z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2 + y^2) \end{bmatrix}. \quad (32.6)$$

Komponente  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  in  $I_{zz}$  se imenujejo *vztrajnostni momenti* telesa okoli ustreznih osi.

Vztrajnostni tenzor je očitno aditiven: vztrajnostni moment telesa je vsota vztrajnostnih momentov njegovih sestavnih delov.

Če telo smatramo kot zvezno, potem postane vsota iz definicije (32.2) integral po prostornini telesa:

$$I_{ik} = \int \rho(x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k) dV. \quad (32.7)$$

Kot vsak simetrični tenzor drugega reda lahko tudi vztrajnostni tenzor diagonaliziramo s primerno izbiro smeri osi  $x_1$ ,  $x_2$  in  $x_3$ . Te smeri se imenujejo *glavne vztrajnostne osi* (angl. *principal axes of inertia*), ustrezne vrednosti diagonalnih komponente tenzorja pa so *glavni vztrajnostni momenti*, ki jih označimo z  $I_1$ ,  $I_2$  in  $I_3$ . Ko so osi  $x_1$ ,  $x_2$  in  $x_3$  izbrane na opisani način, lahko kinetično energijo vrtenja zapišemo na preprost način:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2). \quad (32.8)$$

Nobeden izmed treh glavnih vztrajnostnih momentov ne more biti večji od vsote drugih dveh. Na primer

$$I_1 + I_2 = \sum m(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) \geq \sum m(x_1^2 + x_2^2) = I_3. \quad (32.9)$$

Telo, pri katerem so vsi trije glavni vztrajnostni momenti različni, se imenuje *nesimetrična vrtavka*. Če sta dva enaka ( $I_1 = I_2 \neq I_3$ ), telesu pravimo *simetrična vrtavka*. V tem primeru si lahko eno izmed glavnih osi v ravnini  $x_1x_2$  poljubno izberemo. Če so enaki vsi trije glavni vztrajnostni momenti, se telo imenuje *krogelna vrtavka*, za tri vztrajnostne osi pa si lahko izberemo poljubne tri med seboj pravokotne osi.

Glavne vztrajnostne osi telesa lahko hitro določimo, če je telo simetrično, saj je razumljivo, da morajo težišče telesa in smeri glavnih osi imeti isto simetrijo kot telo. Če ima na primer telo

zrcalno simetrijo, mora težišče ležati v ravnini zrcaljenja, kar velja tudi za dve izmed glavnih osi, medtem ko mora biti tretja pravokotna na ravnino, Očiten primer je sistem delcev, ki vsi ležijo v isti ravnini. V tem primeru obstaja preprosta povezava med tremi glavnimi vztrajnostnimi momenti. Naj bo ravnina, v kateri ležijo delci, ravnina  $x_1x_2$ , medtem ko je za vse delce  $x_3 = 0$ . Tedaj je  $I_1 = \sum mx_2^2$ ,  $I_2 = \sum mx_1^2$ ,  $I_3 = \sum m(x_1^2 + x_2^2)$ , od koder sledi

$$I_3 = I_1 + I_2. \quad (32.10)$$

Če ima telo simetrijsko os poljubnega reda, mora težišče ležati na osi, os pa je tudi ena izmed glavnih vztrajnostnih osi, drugi dve pa sta na os pravokotni. Če je red osi višji od drugega, je telo simetrična vrtavka. Poljubno os, ki je pravokotna na simetrijsko os, lahko namreč zasukamo za kot različen od  $180^\circ$  okoli simetrijske osi, zato izbira pravokotnih osi ni enolična, kaj je možno le pri simetrični vrtavki.

Poseben primer je sistem delcev, ki vsi ležijo na isti premici. Če os  $x_3$  sovпада s to premico, za vsak delec velja  $x_1 = x_2 = 0$ , zato sta dva vztrajnostna momenta enaka, tretji pa je enak nič:

$$I_1 = I_2 = \sum mx_3^2, \quad I_3 = 0. \quad (32.11)$$

Takšen sistem se imenuje *rotator*. Od drugih teles se loči po tem, da ima le dve (okoli osi  $x_1$  in  $x_2$ ) in ne treh vrtilnih prostostnih stopenj: nesmiselno je govoriti o vrtenju premice same okoli sebe.

Na koncu navedimo še eno pravilo, ki je uporabno pri računanju vztrajnostnega tenzorja. Čeprav smo tenzor definirali glede na koordinatni sistem, katerega izhodišče leži v težišču (kar je potrebno, če naj velja osnovna enačba (32.3)), ga lahko včasih lažje določimo, če najprej izračunamo podoben tenzor  $I'_{ik} = \sum m(x'_i{}^2\delta_{ik} - x'_ix'_k)$ , ki je definiran glede na drugo izhodišče  $O'$ . Če razdaljo  $OO'$  predstavlja vektor  $\mathbf{a}$ , velja  $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$ ,  $x_i = x'_i + a_i$ ; ker zaradi definicije točke  $O$  velja  $\sum m\mathbf{r} = 0$ , od tod sledi

$$I'_{ik} = I_{ik} + \mu(a^2\delta_{ik} - a_ia_k). \quad (32.12)$$

Z uporabo te formule \* lahko hitro izračunamo  $I_{ik}$ , če je  $I'_{ik}$  poznan.

## NALOGE

NALOGA 1. Določi vztrajnostne momente molekul, ki jih smatramo kot sisteme togo povezanih delcev, naslednjih oblik: (a) linearna molekula, (b) triatomska molekula v obliki enakokrakega trikotnika (slika 36), (c) štiriatomska molekula v obliki enakostraničnega tetraedra (slika 37).

Rešitev: (a)

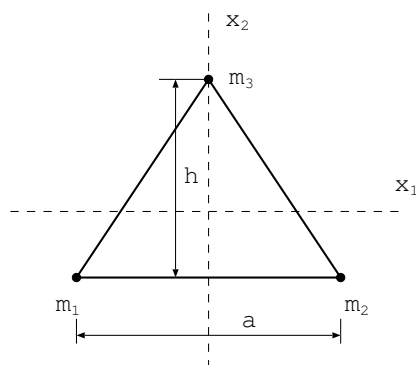
$$I_1 = I_2 = \frac{1}{\mu} \sum_{a \neq b} m_a m_b l_{ab}^2, \quad I_3 = 0,$$

kjer je  $m_a$  masa  $a$ -tega atoma,  $l_{ab}$  razdalja med  $a$ -tim in  $b$ -tim atomom, seštevamo pa po vseh parih atomov v molekuli.

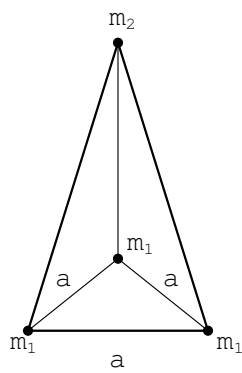
Za dvoatomsko molekula ima vsota en sam člen, rezultat pa je predvidljiv: to je zmnožek reducirane mase atomov in kvadrata razdalje med njima:  $I_1 = I_2 = m_1 m_2 l^2 / (m_1 + m_2)$ .

(b) Težišče je na simetrijski osi trikotnika, od osnovnice je oddaljeno za  $X_2 = m_2 h / \mu$  ( $h$  je višina trikotnika). Vztrajnostni momenti so  $I_1 = 2m_1 m_2 h^2 / \mu$ ,  $I_2 = \frac{1}{2} m_1 a^2$ ,  $I_3 = I_1 + I_2$ .

\*Imenujemo jo tudi *Steinerjev izrek*. op. prev.



Slika 36:



Slika 37:



(c) Težišče je na simetrijski osi tetraedra in je oddaljeno za  $X_3 = m_2 h / \mu$  od osnovne ploskve ( $h$  je višina tetraedra). Vztrajnostni momenti so  $I_1 = I_2 = 3m_1 m_2 h^2 / \mu + \frac{1}{2} m_1 a^2$ ,  $I_3 = m_1 a^2$ . Če je  $m_1 = m_2$  in  $h = \sqrt{2/3} a$ , je molekula enakostranični tetraeder in dobimo  $I_1 = I_2 = I_3 = m_1 a^2$ .

NALOGA 2. Izračunaj vztrajnostne momente naslednjih homogenih teles: (a) tanka palica dolžine  $l$ , (b) krogla polmera  $R$ , (c) okrogel valj polmera  $R$  in višine  $h$ , (d) kvader s stranicami  $a$ ,  $b$  in  $c$ , (e) pokončni krožni stožec višine  $h$  in polmera  $R$ , (f) elipsoid s polosmi  $a$ ,  $b$  in  $c$ .

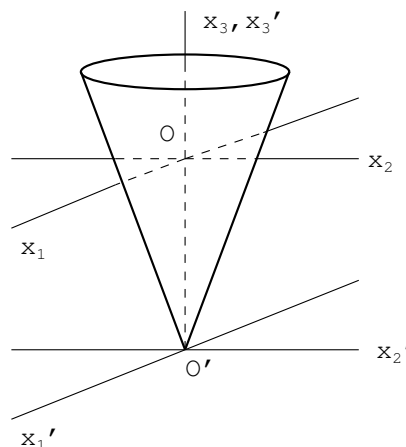
Rešitev: (a)  $I_1 = I_2 = \frac{1}{12} \mu l^2$ ,  $I_3 = 0$  (če zanemarimo debelino palice)

(b)  $I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5} \mu R^2$  (kar dobimo, če izračunamo vsoto  $I_1 + I_2 + I_3 = 2\rho \int r^2 dV$ ).

(c)  $I_1 = I_2 = \frac{1}{4} \mu (R^2 + \frac{1}{3} h^2)$ ,  $I_3 = \frac{1}{2} \mu R^2$  (os  $x_3$  sovпада s simetrijsko osjo valja)

(d)  $I_1 = \frac{1}{12} \mu (b^2 + c^2)$ ,  $I_2 = \frac{1}{12} \mu (a^2 + c^2)$ ,  $I_3 = \frac{1}{12} \mu (a^2 + b^2)$  (osi  $x_1, x_2, x_3$  ležijo v smeri stranic  $a, b$  in  $c$ )

(e) Najprej izračunamo tenzor  $I'_{ik}$  glede na izhodišče v vrhu stožca (slika 38). Izračun je preprost, če uporabimo valjni koordinatni sistem. Dobimo  $I'_1 = I'_2 = \frac{3}{5} \mu (\frac{1}{4} R^2 + h^2)$ ,  $I'_3 = \frac{3}{10} \mu R^2$ . Hitro lahko ugotovimo, da težišče leži na osi stožca, in da je od vrha stožca oddaljeno za  $a = \frac{3}{4} h$ . S Steinerjevim pravilom (32.12) potem dobimo  $I_1 = I_2 = I'_1 - \mu a^2 = \frac{3}{20} \mu (R^2 + \frac{1}{4} h^2)$ ,  $I_3 = I'_3 = \frac{3}{10} \mu R^2$ .



Slika 38:

(f) Težišče elipsoide leži v njegovem izhodišču, glavne vztrajnostne osi pa ležijo v smereh osi elipsoida. Integracijo po prostornini elipsoida lahko poenostavimo v integracijo po prostornini krogle s transformacijo  $x = a\xi$ ,  $y = b\eta$ ,  $z = c\zeta$ , ki enačbo površine elipsoida  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$  pretvori v enačbo enotske krogle  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ .

Na primer vztrajnostni moment okoli osi  $x$  je enak

$$\begin{aligned} I_1 &= \rho \iiint (y^2 + z^2) dx dy dz \\ &= \rho abc \iiint (b^2 \eta^2 + c^2 \zeta^2) d\xi d\eta d\zeta \\ &= \frac{1}{2} abc I'(b^2 + c^2), \end{aligned}$$

kjer je  $I'$  vztrajnostni moment enotske krogle. Ker je prostornina elipsoida  $4\pi abc/3$ , od tod dobimo vztrajnostne momente elipsoida:  $I_1 = \frac{1}{5} \mu (b^2 + c^2)$ ,  $I_2 = \frac{1}{5} \mu (a^2 + c^2)$ ,  $I_3 = \frac{1}{5} \mu (a^2 + b^2)$ .

NALOGA 3. Izračunaj frekvenco majhnega nihanja togega nihala (angl. *compound pendulum*) (togege telesa, ki lahko prosto niha okoli nepremične vodoravne osi v težnostnem polju).

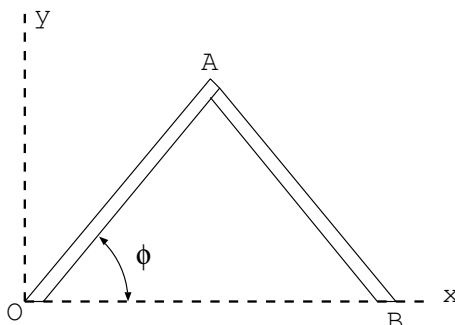
*Rešitev:* Naj bo  $l$  razdalja med težiščem nihala in osjo, okoli katere se lahko vrti nihalo,  $\alpha$ ,  $\beta$  in  $\gamma$  pa naj bodo koti med glavnimi vztrajnostnimi osmi in osjo vrtenja. Kot spremenljivko si bomo izbrali kot  $\phi$  med navpičnico in premico skozi težišče, ki je pravokotna na os vrtenja. Hitrost težišča je  $V = l\dot{\phi}$ , komponente kotne hitrosti v smereh glavnih vztrajnostnih osi pa so  $\dot{\phi} \cos \alpha$ ,  $\dot{\phi} \cos \beta$  in  $\dot{\phi} \gamma$ . Če predpostavimo, da je kot  $\phi$  majhen, je potencialna energija enaka  $U = \mu gl(1 - \cos \phi) \approx \frac{1}{2} \mu gl \dot{\phi}^2$ . Lagrangeva funkcija je torej

$$L = \frac{1}{2} \mu l^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma) \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \mu gl \dot{\phi}^2.$$

Frekvenca nihanja je

$$\omega^2 = \mu gl / (\mu l^2 + I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma).$$

NALOGA 4. Izračunaj kinetično energijo sistema, prikazanega na sliki 39:  $OA$  in  $OB$  sta tanki ravni palici s konstantnimi presekom, dolžine  $l$ , ki sta povezani s tečajem v točki  $A$ . Palica  $OA$  se vrti (v ravnini slike) okoli točke  $O$ , skrajni konec  $B$  palice  $AB$  pa lahko drsi po premici  $Ox$ .



Slika 39:

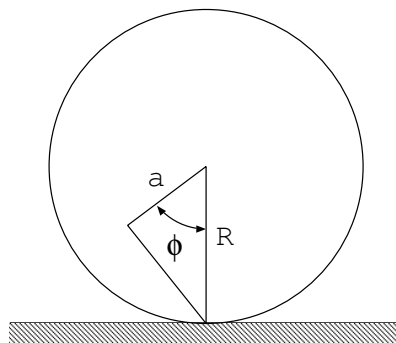
*Rešitev:* Hitrost težišča palice  $OA$  (ki leži v sredini palice) je  $\frac{1}{2} l \dot{\phi}$ , kjer je  $\phi$  kot  $AOB$ . Kinetična energija palice  $OA$  je torej  $T_1 = \frac{1}{8} \mu l^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2$ , kjer je  $\mu$  masa vsake palice.

Kartezični koordinati težišča palice  $AB$  sta  $X = \frac{3}{2} l \cos \phi$  in  $Y = \frac{1}{2} l \sin \phi$ . Ker je kotna hitrost vrtenja tudi druge palice enaka  $\dot{\phi}$ , je kinetična energija te palice enaka  $T_2 = \frac{1}{2} \mu (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 = \frac{1}{8} \mu l^2 (1 + 8 \sin^2 \phi) \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2$ . Celotna kinetična energija tega sistema je torej  $T = \frac{1}{3} \mu l^2 (1 + 3 \sin^2 \phi) \dot{\phi}^2$ , ker je  $I = \frac{1}{12} \mu l^2$  (glej nalogo 2(a)).

NALOGA 5. Poišči kinetično energijo valja polmera  $R$ , ki se kotali po ravnih tleh, če je masa valja porazdeljena tako, da je ena glavna vztrajnostna os vzporedna z osjo valja in je od nje oddaljena za  $a$ , vztrajnostni moment okoli te glavne osi pa je  $I$ .

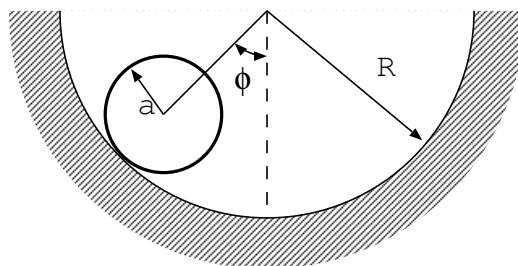
*Rešitev:* Naj bo  $\phi$  kot med navpičnico in premico skozi težišče, ki je pravokotna na os valja (slika 40). Gibanje valja ob poljubnem trenutku lahko opišemo kot čisto vrtenje okoli trenutne osi, ki sovpada s premico, vzdolž katere se valj dotika podlage. Kotna hitrost tega vrtenja je enaka  $\dot{\phi}$ , saj je kotna hitrost vrtenja okoli vseh vzporednih osi enaka. Težišče je od trenutne osi oddaljeno za  $\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \phi}$ , njena hitrost pa je torej  $V = \dot{\phi} \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \phi}$ . Celotna kinetična energija je torej

$$T = \frac{1}{2} \mu (a^2 + R^2 - 2aR \cos \phi) \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2.$$



Slika 40:

NALOGA 6. Poišči kinetično energijo homogenega valja polmera  $a$ , ki se kotali v notranjosti polkrožne površine polmera  $R$  (slika 41).



Slika 41:

*Rešitev:* Z  $\phi$  označimo kot med navpičnico in premico skozi središče valja in središče polkrožne površine. Težišče kotalečega se valja je na osi, njegova hitrost pa je  $V = \dot{\phi}(R - a)$ . Kotna hitrost je enaka kotni hitrosti vrtenja okoli trenutne osi, ki sovpada z dotikališčem valja in podlage,  $\Omega = V/a = \dot{\phi}(R - a)/a$ . Če je  $I_3$  vztrajnostni moment okoli osi valja, dobimo

$$T = \frac{1}{2}\mu(R - a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_3(R - a)^2\dot{\phi}^2/a^2 = \frac{3}{4}\mu(R - a)^2\dot{\phi}^2.$$

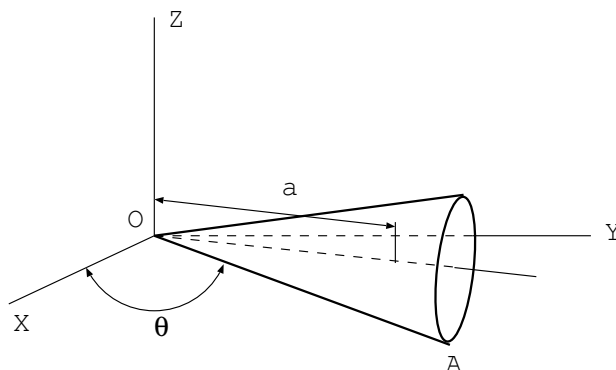
$I_3$  smo izračunali v nalogi 2(c).

NALOGA 7. Poišči kinetično energijo homogenega pokončnega krožnega stožca, ki se kotali po ravnini.

*Rešitev:* Z  $\theta$  označimo kot med daljico  $OA$ , vzdolž katere se stožec dotika tal, in neko poljubno smerjo v ravnini (slika 42). Težišče leži na osi stožca, njegova hitrost je  $V = a\dot{\theta}\cos\alpha$ , kjer je  $\alpha$  kot stožca,  $a$  pa razdalja od težišča do vrha stožca. Kotno hitrost dobimo kot kotno hitrost čistega vrtenja okoli trenutne osi:  $\Omega = V/a\sin\alpha = \dot{\theta}\cot\alpha$ . Ena izmed glavnih vztrajnostnih osi ( $x_3$ ) leži vzdolž osi stožca, drugo os pa si izberemo tako, da leži pravokotno na os stožca in na daljico  $OA$ . Komponente vektorja  $\Omega$  (ki je vzporeden z  $OA$ ) vzdolž glavnih vztrajnostnih osi so  $\Omega\sin\alpha, 0, \Omega\cos\alpha$ . Kinetična energija je torej

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\mu a^2\dot{\theta}^2\cos^2\alpha + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2\cos^2\alpha + \frac{1}{2}I_3\dot{\theta}^2\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha} \\ &= 3\mu h^2\dot{\theta}^2(1 + 5\cos^2\alpha)/40, \end{aligned}$$

kjer je  $h$  višina stožca,  $I_1, I_3$  in  $a$  pa so podani v nalogi 2(e).

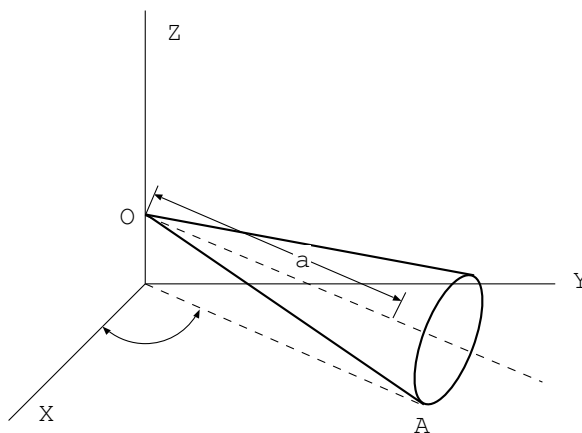


Slika 42:

NALOGA 8. Določi kinetično energijo homogenega pokončnega krožnega stožca, katerega osnovna ploskev se vali po ravnini, vrh stožca pa je vpet na višini, ki je enaka polmeru osnovne ploskve, tako da je os stožca vzporedna z ravnino.

*Rešitev:* Naj bo  $\theta$  kot med izbrano smerjo v ravnini in projekcijo osi stožca na ravnino (slika 43). Hitrost težišča lahko tedaj zapišemo kot  $V = a\dot{\theta}$ , pri čemer uporabljamo enake oznake kot v sedmi nalogi. Trenutna os vrtenja je daljica tvorilka  $OA$ , ki poteka skozi točko, v kateri se stožec dotika ravnine. Težišče je oddaljeno za  $a \sin \alpha$  od te osi, zato je  $\Omega = V/a \sin \alpha = \dot{\theta}/\sin \alpha$ . Komponente vektorja  $\Omega$  vzdolž glavnih vztrajnostnih osi (pri tem je os  $x_2$  pravokotna na os stožca in na daljico  $OA$ ) so  $\Omega \sin \alpha = \dot{\theta}$ ,  $0$ ,  $\Omega \cos \alpha = \dot{\theta} \cot \alpha$ . Kinetična energija je torej

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \mu a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\theta}^2 \cot^2 \alpha \\ &= 3\mu h^2 \dot{\theta}^2 (\sec^2 \alpha + 5)/40. \end{aligned}$$



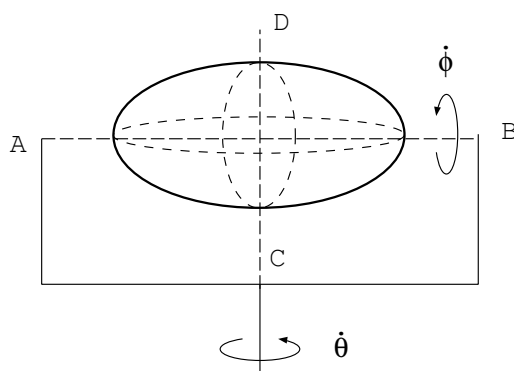
Slika 43:

NALOGA 9. Določi energijo homogenega elipsoida, ki se vrti okoli ene izmed svojih osi ( $AB$  na slika 44), medtem ko se ta os sočasno vrti okoli premice  $CD$ , ki je pravokotna na os  $AB$  in poteka skozi središče elipsoida.

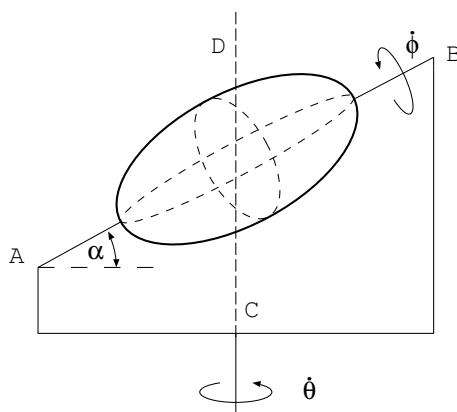
*Rešitev:* Kot zasuka okoli  $CD$  naj bo  $\theta$ , kot zasuka okoli  $AB$  (torej kot med  $CD$  in glavno vztrajnostno osjo  $x_1$ , ki je pravokotna na  $AB$ ) pa naj bo  $\phi$ . Komponente vektorja  $\Omega$  vzdolž vztrajnostnih osi so

tedaj  $\dot{\theta} \cos \phi$ ,  $\dot{\theta} \sin \phi$ ,  $\dot{\phi}$ , če je os  $x_3$  enaka osi  $AB$ . Ker težišče v središču elipsoida miruje, je kinetična energija enaka

$$T = \frac{1}{2}(I_1 \cos^2 \phi + I_2 \sin^2 \phi)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\phi}^2.$$



Slika 44:



Slika 45:

NALOGA 10. Kot v deveti nalogi, le da tu os  $AB$  ni pravokotna na  $CD$ , še vedno pa leži vzdolž simetrijske osi elipsoida (slika 45).

*Rešitev:* Komponente vektorja  $\boldsymbol{\Omega}$  vzdolž osi  $AB$  in drugih dveh glavnih vztrajnostnih osi, ki so pravokotne na  $AB$ , sicer pa poljubne, so  $\dot{\theta} \cos \alpha \cos \phi$ ,  $\dot{\theta} \cos \alpha \sin \phi$ ,  $\dot{\phi} + \dot{\theta} \sin \alpha$ . Kinetična energija je  $T = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha + \frac{1}{2}I_3(\dot{\phi} + \dot{\theta} \sin \alpha)^2$ .

### §33 Vrtilna količina togega telesa

Kot že vemo, je vrednost vrtilne količine odvisna od točke, glede na katero je definirana. Pri mehaniki togega telesa je najbolj primerna izbira izhodišče gibljivega koordinatnega sistema, torej težišče telesa. V nadaljevanju bomo tako definirano vrtilno količino označevali z  $\mathbf{M}$ .

Iz enačbe (9.6) sledi ob naši izbiri izhodišča v težišču, da je vrtilna količina  $\mathbf{M}$  enaka “lastni” vrtilni količini telesa, ki je posledica vrtenja telesa okoli lastnega težišča. V definiciji  $\mathbf{M} = \sum m \mathbf{r} \times \mathbf{v}$  zato nadomestimo  $\mathbf{v}$  z  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ :

$$\mathbf{M} = \sum m \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \sum m [r^2 \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega})],$$

ali v tenzorskem zapisu

$$M_i = \sum m (x_l^2 \Omega_i - x_i x_k \Omega_k) = \Omega_k \sum m (x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k).$$

Z uporabo definicije (32.2) vztrajnostnega tenzorja končno dobimo

$$M_i = I_{ik} \Omega_k. \quad (33.1)$$

Če se osi  $x_1$ ,  $x_2$  in  $x_3$  ujemajo z glavnimi vztrajnostnimi osmi, lahko enačbo (33.1) zapišemo kot

$$M_1 = I_1 \Omega_1, \quad M_2 = I_2 \Omega_2, \quad M_3 = I_3 \Omega_3. \quad (33.2)$$

V posebnem primeru, ko imamo opravka s krogelno vrtavko, so vsi trije glavni vztrajnostni momenti enaki in velja preprosta enačba

$$\mathbf{M} = I \boldsymbol{\Omega}, \quad (33.3)$$

kar pomeni, da je vektor vrtilne količine sorazmeren z vektorjem kotne hitrosti in kaže v isto smer. Pri poljubnem telesu pa v splošnem vektor  $\mathbf{M}$  ne kaže v isto smer kot vektor  $\boldsymbol{\Omega}$ ; v isto smer kažeta le tedaj, ko se telo vrti okoli ene izmed glavnih vztrajnostnih osi.

Oglejmo si togo telo, ki se giblje prosto; nanj ne deluje nobena zunanja sila. Predpostavimo, da smo iz naloge predhodno izločili enakomerno premočrtno gibanje telesa, ki ni zanimivo, tako da je edino gibanje telesa prosto vrtenje.

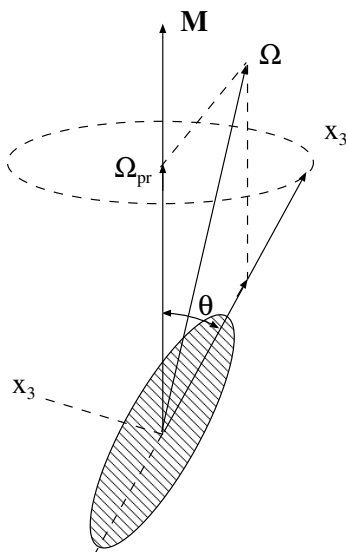
Tako kot pri vsakem izoliranem sistemu je tudi pri prosto vrtečem se telesu vrtilna količina konstantna. Pri krogelni vrtavki iz pogoja  $\mathbf{M} = \text{konst}$  sledi  $\boldsymbol{\Omega} = \text{konst}$ ; to pomeni, da je najbolj splošno prosto vrtenje krogelne vrtavke enakomerno vrtenje okoli nepremične osi.

Tudi pri rotatorju je gibanje preprosto. Tudi tu je  $\mathbf{M} = I \boldsymbol{\Omega}$ , kjer je vektor  $\boldsymbol{\Omega}$  pravokoten na os rotatorja. Zato je prosto vrtenje rotatorja enakomerno vrtenje v ravnini okoli osi, ki je na ravnino pravokotna.

Zakon o ohranitvi vrtilne količine zadostuje tudi za to, da določimo bolj kompleksno prosto vrtenje simetrične vrtavke. Uporabimo dejstvo, da lahko dve glavni vztrajnostni osi  $x_1, x_2$  (pravokotni na simetrijsko os vrtavke  $x_3$ ) poljubno izberemo in os  $x_2$  postavimo tako, da je pravokotna na ravnino, ki vsebuje konstantni vektor  $\mathbf{M}$  in trenutni položaj osi  $x_3$ . Tedaj je  $M_2 = 0$  in iz (33.2) sledi, da je  $\Omega_2 = 0$ . To pomeni, da smeri  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\Omega}$  ter osi vrtavke v vsakem trenutku ležijo v eni ravnini (slika 46). Od tod pa sledi, da je hitrost  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  vsake točke na osi vrtavke v vsakem trenutku pravokotna na to ravnino. To pomeni, da se os vrtavke enakomerno vrti (glej spodaj) okoli smeri vektorja  $\mathbf{M}$  in opiše krožni stožec. Temu pravimo *navadna precesija* vrtavke. Sočasno se vrtavka enakomerno vrti okoli lastne osi.

Kotni hitrosti obeh vrtenj lahko preprosto zapišemo z vrtilno količino  $\mathbf{M}$  in kotom  $\theta$  med osjo vrtavke in smerjo vektorja  $\mathbf{M}$ . Kotna hitrost vrtenja vrtavke okoli lastne osi je kar komponenta vzdolž osi vektorja  $\boldsymbol{\Omega}$ , torej  $\Omega_3$ :

$$\Omega_3 = M_3 / I_3 = (M / I_3) \cos \theta. \quad (33.4)$$



Slika 46:

Hitrost precesije  $\Omega_{\text{pr}}$  dobimo tako, da vektor  $\Omega$  razdelimo na komponenti vzdolž osi  $x_3$  in v smeri  $\mathbf{M}$ . Prva komponenta ne opisuje premikanja osi vrtavke, zato je druga komponenta že kar iskana kotna hitrost precesije. Slika 46 kaže, da je  $\Omega_{\text{pr}} \sin \theta = \Omega_1$ . Ker je  $\Omega_1 = M/I_1 = (M/I_1) \sin \theta$ , sledi

$$\Omega_{\text{pr}} = M/I_1. \quad (33.5)$$

### §34 Gibalne enačbe za togo telo

Ker ima togo telo v splošnem šest prostostnih stopenj, mora biti tudi gibalnih enačb šest. Zapišemo jih lahko v obliki, kjer nastopata časovna odvoda dveh vektorjev, gibalne količine in vrtilne količine telesa.

Prvo enačbo dobimo, če seštejemo enačbe  $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}$  za vsak delec v telesu, kjer je  $\mathbf{p}$  gibalna količina delca,  $\mathbf{f}$  pa sila, ki nanj deluje. Celotna gibalna količina telesa je  $\mathbf{P} = \sum \mathbf{p} = \mu \mathbf{V}$ , skupna sila na telo (rezultanta, op. prev.) pa je  $\mathbf{F} = \sum \mathbf{f}$ ; prva gibalna enačba se s tema količinama zapiše kot

$$d\mathbf{P}/dt = \mathbf{F}. \quad (34.1)$$

Čeprav smo  $\mathbf{F}$  definirali kot vsoto vseh sil  $\mathbf{f}$ , ki delujejo na različne delce, vključno s silami zaradi ostalih delcev, sila  $\mathbf{F}$  dejansko sestoji le iz zunanjih sil: sile zaradi interakcij med delci se morajo okrajšati, ker mora biti v odsotnosti zunanjih sil gibalna količina telesa ohranjena (tako kot pri vseh izoliranih sistemih), zato mora tedaj veljati  $\mathbf{F} = 0$ .

Če je  $U$  potencialna energija togega telesa v zunanjem polju, dobimo silo  $\mathbf{F}$  z odvajanjem  $U$  po koordinatah težišča:

$$\mathbf{F} = -\partial U/\partial \mathbf{R}. \quad (34.2)$$

Če se namreč telo vzporedno premakne za razdajo  $\delta \mathbf{R}$ , se krajevni vektor  $\mathbf{r}$  vsake točke telesa spremeni za  $\delta \mathbf{R}$ , zato je razlika potencialne energije

$$\delta U = \sum (\partial U/\partial \mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{R} \cdot \sum \partial U/\partial \mathbf{r} = -\delta \mathbf{R} \cdot \sum \mathbf{f} = -\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{R}.$$

Opazimo, da lahko enačbo (34.1) dobimo tudi kot Lagrangevo enačbo za koordinate težišča,  $(d/dt)\partial L/\partial \mathbf{V} = \partial L/\partial \mathbf{R}$ , z Lagrangevo funkcijo (32.4), za katero dobimo

$$\partial L/\partial \mathbf{V} = \mu \mathbf{V} = \mathbf{P}, \quad \partial L/\partial \mathbf{R} = -\partial U/\partial \mathbf{R} = \mathbf{F}.$$

Izpeljimo sedaj drugo gibalno enačbo, ki podaja časovni odvod vrtilne količine  $\mathbf{M}$ . Izpeljavo bomo poenostavili tako, da si bomo izbrali “nepremičen” (inercialen) opazovalni sistem tako, da bo težišče v tem sistemu mirovalo v obravnavanem trenutku.

Velja  $\dot{\mathbf{M}} = (d/dt) \sum \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \sum \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \sum \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}$ . Naša izbira opazovalnega sistema, kjer je  $\mathbf{V} = 0$ , pomeni, da je vrednost odvoda  $\dot{\mathbf{r}}$  v obravnavanem trenutku enaka  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ . Ker sta vektorja  $\mathbf{v}$  in  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  vzporedna, je  $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} = 0$ . Odvod  $\dot{\mathbf{p}}$  zamenjamo s silo  $\mathbf{f}$  in končno dobimo

$$d\mathbf{M}/dt = \mathbf{K}, \quad (34.3)$$

kjer je

$$\mathbf{K} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f}. \quad (34.4)$$

Ker smo  $\mathbf{M}$  definirali kot vrtilno količino okoli težišča (glej začetek 33), se ta ne spremeni ob prehodu iz enega inercialnega sistema v drugega. To je razvidno iz enačbe (9.5) z  $\mathbf{R} = 0$ . Od tod sledi, da gibalna enačba (34.3) zaradi Galilejevega načela relativnosti velja v poljubnem inercialnem opazovalnem sistemu, čeprav smo jo izpeljali v posebno izbranem sistemu.

Vektor  $\mathbf{r} \times \mathbf{f}$  se imenuje *navor* sile  $\mathbf{f}$ , zato je  $\mathbf{K}$  skupni *navor*, torej vsota vseh navorov sil, ki delujejo na telo. Podobno kot skupna sila  $\mathbf{F}$  vključuje tudi vsota (34.4) samo zunanje sile: zaradi ohranitve vrtilne količine mora biti vsota navorov notranjih sil v izoliranem sistemu enaka nič.

Navor sile je tako kot vrtilna količina v splošnem odvisen od izbire izhodišča, glede na katerega je definiran. V (34.3) in (34.4) so navori definirani glede na težišče telesa.

Ko se izhodišče premakne za  $\mathbf{a}$ , je nov krajevni vektor  $\mathbf{r}'$  vsake točke telesa enak  $\mathbf{r} - \mathbf{a}$ . Zato je  $\mathbf{K} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \sum \mathbf{r}' \times \mathbf{f} + \sum \mathbf{a} \times \mathbf{f}$  ali

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}' + \mathbf{a} \times \mathbf{F}. \quad (34.5)$$

Vidimo, da je navor neodvisen od izbire izhodišča, če je rezultanta sil na telo  $\mathbf{F} = 0$ . V tem primeru rečemo, da na telo deluje *dvojica sil*.

Enačbo (34.3) lahko smatramo kot Lagrangevo enačbo  $(d/dt)\partial L/\partial \boldsymbol{\Omega} = \partial L/\partial \phi$  za “vrtilne koordinate”. Če Lagrangevo funkcijo (32.4) odvajamo po komponentah vektorja  $\boldsymbol{\Omega}$ , dobimo  $\partial L/\partial \Omega_i = I_{ik}\Omega_k = M_i$ . Sprememba potencialne energije zaradi infinitezimalnega zasuka telesa  $\delta\phi$  je  $\delta U = -\sum \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} = -\sum \mathbf{f} \cdot \delta\phi \times \mathbf{r} = -\delta\phi \cdot \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f} = -\mathbf{K} \cdot \delta\phi$ , od koder sledi

$$\mathbf{K} = -\partial U/\partial \phi, \quad (34.6)$$

tako da je  $\partial L/\partial \phi = -\partial U/\partial \phi = \mathbf{K}$ .

Predpostavimo, da sta  $\mathbf{F}$  in  $\mathbf{K}$  pravokotna. Tedaj obstaja vektor  $\mathbf{a}$ , za katerega je  $\mathbf{K}'$  iz enačbe (34.5) enak nič in velja

$$\mathbf{K} = \mathbf{a} \times \mathbf{F}. \quad (34.7)$$

Izbira vektorja  $\mathbf{a}$  ni enolična, saj lahko k  $\mathbf{a}$  prištejemo poljuben vektor, ki je vzporeden z  $\mathbf{F}$ , pa se enačba (34.7) ne bo spremenila. Pogoji  $\mathbf{K}' = 0$  zato ustreza premici (in ne točki) v gibljivem



koordinatnem sistemu. Ko je  $\mathbf{K}$  pravokoten na  $\mathbf{F}$ , lahko učinek delujočih sil privedemo na eno samo silo  $\mathbf{F}$ , ki deluje vzdolž te premice.

Takšen primer je na primer homogeno polje sile, v katerem je sila na delce  $\mathbf{f} = e\mathbf{E}$ , kjer je  $\mathbf{E}$  konstanten vektor, ki opisuje polje,  $e$  pa lastnost delca glede na to polje. \* Tedaj je  $\mathbf{F} = \mathbf{E} \sum e$ ,  $\mathbf{K} = \sum e\mathbf{r} \times \mathbf{E}$ . Predpostavimo, da  $\sum e \neq 0$ , in vpeljimo krajevni vektor  $\mathbf{r}_0$ , ki izpolnjuje pogoj

$$\mathbf{r}_0 = \sum e\mathbf{r} / \sum e. \quad (34.8)$$

Skupni navor je preprosto

$$\mathbf{K} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{F}. \quad (34.9)$$

Ko se togo telo giblje v homogenem polju, je torej učinek polja takšen, kot bi ena sama sila  $\mathbf{F}$  prijemala v točki, katere krajevni vektor je (34.8). Lega te točke je povsem določena z lastnostmi telesa. Na primer v gravitacijskem polju je ta točka težišče.

## §35 Eulerjevi koti

Kot smo že omenili, lahko gibanje togega telesa opišemo s koordinatami njegovega težišča in s tremi koti, ki določijo usmerjenost osi  $x_1$ ,  $x_2$  in  $x_3$ . Za te kote si je pogosto smiselno izbrati *Eulerjeve kote*.

Ker nas zanimajo le koti med koordinatnimi osmi, lahko izhodišči obeh sistemov postavimo v isto točko (slika ??). Gibljiva ravnina  $x_1x_2$  seka nepremično ravnino  $XY$  vzdolž premice  $ON$ , ki se imenuje *modalna premica*. Ta je pravokotna tako na os  $Z$  kot na os  $x_3$ ; njena pozitivna smer je v smeri vektorskega produkta  $\mathbf{z} \times \mathbf{x}_3$  (kjer sta  $\mathbf{z}$  in  $\mathbf{x}_3$  enotska vektorja vzdolž osi  $z$  in  $x_3$ ).

Smeri osi  $x_1$ ,  $x_2$  in  $x_3$  glede na osi  $X$ ,  $Y$  in  $Z$  so določene s kotom  $\theta$  med osmi  $Z$  in  $x_3$ , kotom  $\phi$  med osjo  $X$  in polpremico  $ON$ , ter kotom  $\psi$  med osjo  $x_1$  in polpremico  $ON$ . Kota  $\phi$  in  $\psi$  merimo okoli osi  $Z$  in  $x_3$  v smeri podani s pravilom desnega vijaka. Kot  $\theta$  ima vrednosti med 0 in  $\pi$ , kota  $\phi$  in  $\psi$  pa med 0 in  $2\pi$ . †

Zapišimo sedaj komponente kotne hitrosti  $\Omega$  vzdolž osi  $x_1$ ,  $x_2$  in  $x_3$  z Eulerjevimi koti in njihovimi odvodi. V ta namen moramo poiskati komponente hitrosti  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$  in  $\dot{\psi}$  vzdolž teh osi. Kotna hitrost  $\dot{\theta}$  je v smeri modalne premice  $ON$ , njene komponente pa so  $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} \cos \psi$ ,  $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta} \sin \psi$ ,  $\dot{\theta}_3 = 0$ . Kotna hitrost  $\dot{\phi}$  je v smeri osi  $Z$ ; njena komponenta vzdolž osi  $x_3$  je  $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta$ , v ravnini  $x_1x_2$  pa  $\dot{\phi} \sin \theta$ . Slednjo razcepimo na komponenti vzdolž osi  $x_1$  in  $x_2$ , ki sta  $\dot{\phi}_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi$  in  $\dot{\phi}_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi$ . Kotna hitrost  $\dot{\psi}$  pa je v celoti vzdolž osi  $x_3$ .

Zberemo komponente vzdolž vsake izmed osi in dobimo

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \Omega_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \Omega_3 &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \right\} \quad (35.1)$$

Če so osi  $x_1$ ,  $x_2$  in  $x_3$  glavne vztrajnostne osi telesa, potem dobimo vrtilno kinetično energijo, izraženo z Eulerjevimi koti, če vstavimo (35.1) v (32.8).

\*V homogenem električnem polju je na primer  $\mathbf{E}$  jakost električnega polja,  $e$  pa naboj; v homogenem gravitacijskem polju je  $\mathbf{E}$  gravitacijski pospešek  $\mathbf{g}$ ,  $e$  pa masa  $m$ .

†Kota  $\theta$  in  $\phi - \frac{1}{2}\pi$  sta polarni kot in azimut smeri  $x_3$  glede na osi  $X$ ,  $Y$  in  $Z$ . Kota  $\theta$  in  $\frac{1}{2}\pi - \psi$  sta polarni kot in azimut smeri  $Z$  glede na osi  $x_1$ ,  $x_2$  in  $x_3$ .

Za simetrično vrtavko ( $I_1 = I_2 \neq I_3$ ) tako dobimo

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I_1(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2. \quad (35.2)$$

Ta izraz lahko poenostavimo, če upoštevamo dejstvo, da je pri simetrični vrtavki izbira glavnih osi  $x_1$  in  $x_2$  poljubna. Če izberemo os  $x_1$  vzdolž vozalne premice  $ON$ , torej  $\psi = 0$ , potem so komponente kotne hitrosti kar

$$\Omega_1 = \dot{\theta}, \quad \Omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta, \quad \Omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}. \quad (35.3)$$

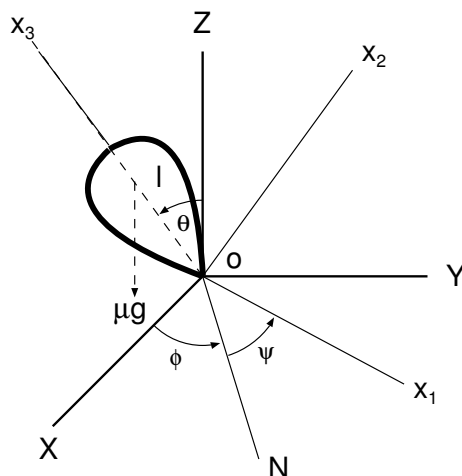
Kot preprost primer uporabe Eulerjevih kotov si bomo ponovno ogledali prosto gibanje simetrične vrtavke (glej 33). Naj bo os  $Z$  nepremičnega koordinatnega sistema v smeri konstantne vrtilne količine vrtavke  $\mathbf{M}$ . Os  $x_3$  gibljivega sistema je vzdolž osi vrtavke; naj os  $x_1$  sovpada z vozno premico v obravnavanem trenutku. Tedaj so po enačbi (35.3) komponente vektorja  $\mathbf{M}$  enake  $M_1 = I_1\Omega_1 = I_1\dot{\theta}$ ,  $M_2 = I_1\Omega_2 = I_1\dot{\phi} \sin \theta$ ,  $M_3 = I_3\Omega_3 = I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})$ . Ker je os  $x_1$  pravokotna na os  $Z$ , velja  $M_1 = 0$ ,  $M_2 = M \sin \theta$  in  $M_3 = M \cos \theta$ . S primerjavo dobimo

$$\dot{\theta} = 0, \quad I_1\dot{\phi} = M, \quad I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) = M \cos \theta. \quad (35.4)$$

Iz prve enačbe sledi  $\dot{\theta} = \text{konst}$ , zato je kot med osjo vrtavke in smerjo vektorja  $\mathbf{M}$  konstanten. Druga enačba podaja kotno hitrost precesije  $\dot{\phi} = M/I_1$ , kar je v skladu z (33.5). Iz tretje enačbe končno dobimo kotno hitrost, s katero se vrtavka vrti okoli lastne osi:  $\Omega_3 = (M/I_3) \cos \theta$ .

## NALOGE

NALOGA 1. Obravnavo gibanja težke simetrične vrtavke, ki je vpeta v svoji najnižji točki, poenostavi na izračun integrala (slika 47).



Slika 47:

*Rešitev:* Kot skupno izhodišče nepremičnega in gibljivega koordinatnega sistema si izberemo nepremično točko  $O$  na vrtavki, os  $Z$  pa naj kaže navpično navzgor. Lagrangeva funkcija vrtavke v polju

težnosti je  $L = \frac{1}{2}(I_1 + \mu l^2)(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - \mu gl \cos \theta$ , kjer je  $\mu$  masa vrtavke,  $l$  pa razdalja od točke, v kateri je vpeta, do njenega težišča

Koordinati  $\psi$  in  $\phi$  sta ciklični. Zato obstajata dva integrala gibanja:

$$p_\psi = \partial L / \partial \dot{\psi} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = \text{konst} \equiv M_3 \quad (1)$$

$$p_\phi = \partial L / \partial \dot{\phi} = (I'_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta)\dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = \text{konst} \equiv M_z, \quad (2)$$

kjer je  $I'_1 = I_1 + \mu l^2$ ; količini  $p_\psi$  in  $p_\phi$  sta komponenti vrtilne količine glede na  $O$  okoli osi  $x_3$  in  $Z$ . Energija

$$E = \frac{1}{2}I'_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + \mu gl \cos \theta \quad (3)$$

se tudi ohranja.

Iz enačb (1) in (2) sledi

$$\dot{\psi} = (M_z - M_3 \cos \theta) / I'_1 \sin^2 \theta, \quad (4)$$

$$\dot{\phi} = \frac{M_3}{I_3} - \cos \theta \frac{M_z - M_3 \cos \theta}{I'_1 \sin^2 \theta}. \quad (5)$$

Z uporabo enačb (4) in (5) iz energije (3) odpravimo  $\dot{\phi}$  in  $\dot{\psi}$ ,

$$E' = \frac{1}{2}I'_1 \dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}}(\theta),$$

kjer je

$$E' = E - \frac{M_3^2}{2I_3} - \mu gl, \quad (6)$$

$$U_{\text{eff}} = \frac{(M_z - M_3 \cos \theta)^2}{2I'_1 \sin^2 \theta} - \mu gl(1 - \cos \theta).$$

Tako dobimo

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{2[E' - U_{\text{eff}}(\theta)]/I'_1}}; \quad (7)$$

to je eliptični integral. Kota  $\psi$  in  $\phi$  nato izrazimo s  $\theta$  s pomočjo integralov, ki jih dobimo iz enačb (4) in (5).

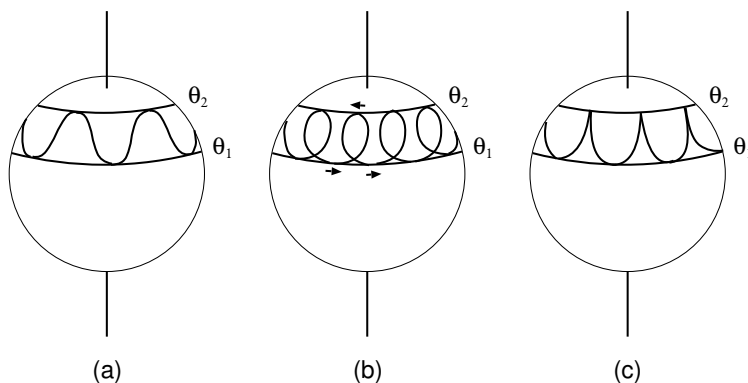
Obseg vrednosti, ki jih lahko med gibanjem zavzame  $\theta$ , je določen s pogojem  $E' \geq U_{\text{eff}}(\theta)$ . Funkcija  $U_{\text{eff}}(\theta)$  gre proti neskončnosti (če  $M_3 \neq M_z$ ), ko gre  $\theta$  proti 0 ali proti  $\pi$ , med tema vrednostma pa ima funkcija minimum. Zato ima enačba  $E' = U_{\text{eff}}(\theta)$  dva korena, ki določata mejni vrednosti  $\theta_1$  in  $\theta_2$  naklona osi vrtavke glede na navpičnico.

Ko se  $\theta$  spreminja od  $\theta_1$  do  $\theta_2$ , odvod  $\dot{\phi}$  spremeni predznak natanko tedaj, ko razlika  $M_z - M_3 \cos \theta$  spremeni predznak na tem območju vrednosti  $\theta$ . Če  $\dot{\phi}$  ne spremeni predznaka, vrtavka enakomerno precedira okoli navpičnice in sočasno kima (niha gor in dol). Takšno nihanje imenujemo *nutacija* (angl. *nutation*); glej sliko 48a, kjer krivulja prikazuje sledi osi na površini krogle, katere središče leži v pritrjeni točki vrtavke. Če  $\dot{\phi}$  spremeni predznak, je smer precesije različna na obeh mejnih krožnicah, zato os vrtavke opisuje zanke, ko se giblje okoli navpičnice (slika 48b). In končno, če je ena izmed vrednosti  $\theta_1$  ali  $\theta_2$  ničla funkcije  $M_z - M_3 \cos \theta$ , tedaj postaneta  $\dot{\phi}$  in  $\theta$  sočasno enaka nič na ustrezni mejni krožnici, pot osi pa je podobna prikazani na sliki 48c.

**NALOGA 2.** Pod kakšnim pogojem je vrtenje vrtavke okoli navpične osi stabilno?

*Rešitev:* Ko je  $\theta = 0$ , osi  $x_3$  in  $Z$  sovpadata, zato je  $M_3 = M_z$  in  $E' = 0$ . Vrtenje okoli te osi je stabilno, če je  $\theta = 0$  minimum funkcije  $U_{\text{eff}}(\theta)$ . Za majhne vrednosti  $\theta$  velja  $U_{\text{eff}} \approx (M_3^2/8I'_1 - \frac{1}{2}\mu gl)\theta^2$ , od koder dobimo pogoj za stabilnost:  $M_3^2 > 4I'_1\mu gl$  ali  $\Omega_3^2 > 4I'_1\mu gl/I_3^2$ .

**NALOGA 3.** Obravnavaj gibanje vrtavke, katere kinetična energija vrtenja okoli osi je velika v primerjavi z njeno potencialno energijo v težnostnem polju (takšno vrtavko imenujemo *hitra vrtavka*).



Slika 48:

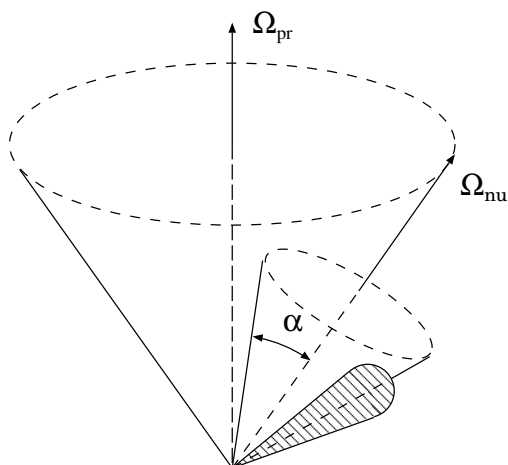
*Rešitev:* V prvem približku zanemarimo vpliv težnosti, tako da os vrtavke prosto precedira okoli smeri vrtilne količine  $\mathbf{M}$ , kar v tem primeru ustreza nutaciji vrtavke; po (33.5) je kotna hitrost te precesije enaka

$$\Omega_{\text{nu}} = \mathbf{M}/I'_1. \quad (1)$$

V naslednjem približku lahko rečemo, da vrtilna količina  $\mathbf{M}$  počasi precedira okoli navpičnice (slika 49). Hitrost te precesije določimo tako, da izračunamo povprečje točne gibalne enačbe (34.3)  $d\mathbf{M}/dt = \mathbf{K}$  po periodi nutacije. Navor težnostne sile na vrtavko je  $\mathbf{K} = \mu l \mathbf{n}_3 \times \mathbf{g}$ , kjer je  $\mathbf{n}_3$  enotski vektor v smeri osi vrtavke. Iz simetrijskih razlogov mora biti očitno, da je rezultat računanja povprečja količine  $\mathbf{K}$  po "nutacijskem stožcu" ta, da moramo nadomestiti  $\mathbf{n}_3$  z njegovo komponento  $(\mathbf{M}/M) \cos \alpha$  v smeri  $\mathbf{M}$ , kjer je  $\alpha$  kot med  $\mathbf{M}$  in osjo vrtavke. Tako dobimo  $d\mathbf{M}/dt = -(\mu l/M) \mathbf{g} \times \mathbf{M} \cos \alpha$ . Od tod razberemo, da vektor  $\mathbf{M}$  precedira okoli smeri  $\mathbf{g}$  (torej okoli navpičnice) s povprečno kotno hitrostjo

$$\overline{\Omega}_{\text{pr}} = -(\mu l/M) \mathbf{g} \cos \alpha, \quad (2)$$

ki je majhna v primerjavi z  $\Omega_{\text{nu}}$ .



Slika 49:

V tem približku sta količini  $M$  in  $\cos \alpha$  v enačbah (1) in (2) konstanti, čeprav v resnici nista integrala gibanja. V okviru iste natančnosti sta povezani s količinami, ki se zares ohranjata, preko zvez  $M_3 = M \cos \alpha$  in

$$E \approx \frac{1}{2} M^2 \left( \frac{\cos^2 \alpha}{I_3} + \frac{\sin^2 \alpha}{I_1} \right).$$

### §36 Eulerjeve enačbe

Gibalne enačbe, zapisane v 34, se nanašajo na nepremični koordinatni sistem: odvoda  $dP/dt$  in  $dM/dt$  v enačbah (34.1) in (34.3) sta hitrosti spreminjanja vektorjev  $\mathbf{P}$  in  $\mathbf{M}$  glede na nepremični sistem. Najbolj preprosto povezavo med komponentami vrtilne količine  $\mathbf{M}$  tega telesa in komponentami kotne hitrosti pa lahko zapišemo v gibljivem koordinatnem sistemu, katerega osi so glavne vztrajnostne osi telesa. To povezavo lahko uporabimo, če gibalne enačbe zapišemo v gibljivih koordinatah  $x_1$ ,  $x_2$  in  $x_3$ .

Naj bo  $d\mathbf{A}/dt$  hitrost spreminjanja poljubnega vektorja  $\mathbf{A}$  v nepremičnem koordinatnem sistemu. Če se vektor  $\mathbf{A}$  v gibljivem sistemu ne spreminja, se v nepremičnem koordinatnem sistemu spreminja samo zaradi vrtenja, zato je  $d\mathbf{A}/dt = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}$ ; glej 9, kjer smo poudarili, da enačbe, kot sta (9.1) in (9.2), veljajo za poljuben vektor. V splošnem moramo na desno stran enačbe dodati člen, ki opisuje spreminjanje vektorja  $\mathbf{A}$  glede na gibljiv koordinatni sistem. Ta člen zapišemo kot  $d'\mathbf{A}/dt$  in dobimo

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d'\mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}. \quad (36.1)$$

Z uporabo splošne formule lahko takoj zapišemo enačbi (34.1) in (34.3) v obliki

$$\frac{d'\mathbf{P}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P} = \mathbf{F}, \quad \frac{d'\mathbf{M}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{M} = \mathbf{K}. \quad (36.2)$$

Ker moramo časovna odvoda izračunati v gibljivem koordinatnem sistemu, lahko vzamemo komponente enačb (36.2) vzdolž osi tega sistema, in zapišemo  $(d'\mathbf{P}/dt)_1 = dP_1/dt$ , ...,  $(d'\mathbf{M}/dt)_1 = dM_1/dt$ , ..., kjer indeksi 1, 2, 3 označujejo komponente vzdolž osi  $x_1$ ,  $x_2$  in  $x_3$ . V prvi enačbi nadomestimo  $\mathbf{P}$  z  $\mu\mathbf{V}$  in dobimo

$$\left. \begin{aligned} \mu \left( \frac{dV_1}{dt} + \Omega_2 V_3 - \Omega_3 V_2 \right) &= F_1, \\ \mu \left( \frac{dV_2}{dt} + \Omega_3 V_1 - \Omega_1 V_3 \right) &= F_2, \\ \mu \left( \frac{dV_3}{dt} + \Omega_1 V_2 - \Omega_2 V_1 \right) &= F_3. \end{aligned} \right\} \quad (36.3)$$

Če so  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  glavne vztrajnostne osi, lahko v drugi enačbi (36.2) upoštevamo  $M_1 = I_1\Omega_1$ , itd. Tako dobimo

$$\left. \begin{aligned} I_1 d\Omega_1/dt + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 &= K_1, \\ I_2 d\Omega_2/dt + (I_1 - I_3)\Omega_3\Omega_1 &= K_2, \\ I_3 d\Omega_3/dt + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 &= K_3. \end{aligned} \right\} \quad (36.4)$$

To so *Eulerjeve enačbe*.

Pri prostem vrtenju je  $\mathbf{K} = 0$ , Eulerjeve enačbe pa se glasijo

$$\left. \begin{aligned} d\Omega_1/dt + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3/I_1 &= 0, \\ d\Omega_2/dt + (I_1 - I_3)\Omega_3\Omega_1/I_2 &= 0, \\ d\Omega_3/dt + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2/I_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (36.5)$$

Kot primer bomo obravnavali prosto vrtenje simetrične vrtavke, ki smo ga že obravnavali. Postavimo  $I_1 = I_2$  in iz tretje enačbe dobimo  $\dot{\Omega}_3 = 0$ , oziroma  $\Omega_3 = \text{konstanta}$ . Prvi enačbi zapišemo kot  $\dot{\Omega}_1 = -\omega\Omega_2$  in  $\dot{\Omega}_2 = \omega\Omega_1$ , kjer je

$$\omega = \Omega_3(I_3 - I_1)/I_1 \quad (36.6)$$

konstanta. Drugo enačbo pomnožimo z  $i$  in obe seštejemo. Dobimo enačbo  $d(\Omega_1 + i\Omega_2)/dt = i\omega(\Omega_1 + i\Omega_2)$  z rešitvijo  $\Omega_1 + i\Omega_2 = A \exp(i\omega t)$ , kjer je  $A$  konstanta, ki jo lahko napravimo realno s primerno izbiro izhodišča za merjenje časa. Zato je

$$\Omega_1 = A \cos \omega t, \quad \Omega_2 = A \sin \omega t. \quad (36.7)$$

Ta rezultat pomeni, da se komponenta kotne hitrosti, pravokotna na os vrtavke, vrti s kotno hitrostjo  $\omega$ , ves čas pa ima isto velikost  $A = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}$ . Ker je komponenta vzdolž osi vrtavke  $\Omega_3$  tudi konstantna, lahko zaključimo, da se vektor  $\boldsymbol{\Omega}$  enakomerno vrti okoli osi vrtavke s kotno hitrostjo  $\omega$ , ves čas pa ima isto velikost. Iz zvez  $M_1 = I_1\Omega_1$ ,  $M_2 = I_2\Omega_2$  in  $M_3 = I_3\Omega_3$  med komponentami vektorjev  $\boldsymbol{\Omega}$  in  $\mathbf{M}$  sledi, da se tudi vektor vrtilne količine giblje na podoben način glede na os vrtavke.

Ta opis je seveda le drugačen pogled na gibanje, ki smo ga obravnavali že v 33 in 35, le da smo tam uporabljali nepremičen koordinatni sistem. Tako je na primer kotna hitrost vektorja  $\mathbf{M}$  (os  $Z$  na sliki 47 v 35) okoli osi  $x_3$ , zapisana z Eulerjevimi koti, enaka kotni hitrosti  $-\dot{\psi}$ . Z uporabo enačb (35.4) dobimo

$$\dot{\psi} = \frac{M \cos \theta}{I_3} - \dot{\phi} \cos \theta = M \cos \theta \left( \frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right),$$

ali  $-\dot{\psi} = \Omega_3(I_3 - I_1)/I_1$ , kar je v skladu z (36.6).

## §37 Nesimetrična vrtavka

Sedaj bomo Eulerjeve enačbe uporabili pri opisu še bolj kompleksnega primera prostega vrtenja nesimetrične vrtavke, pri kateri so vsi trije vztrajnostni momenti različni. Predpostavili bomo, da je

$$I_3 > I_2 > I_1. \quad (37.1)$$

Dva integrala Eulerjevih enačb sta znana, saj sledita iz zakonov o ohranitvi energije in vrtilne količine:

$$\begin{aligned} I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2 &= 2E, \\ I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2 &= M^2, \end{aligned} \quad (37.2)$$

kjer sta energija  $E$  in velikost vrtilne količine  $M$  vnaprej podani konstanti. Enačbi lahko zapišemo tudi s komponentami vektorja  $\mathbf{M}$ :

$$\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} = 2E, \quad (37.3)$$

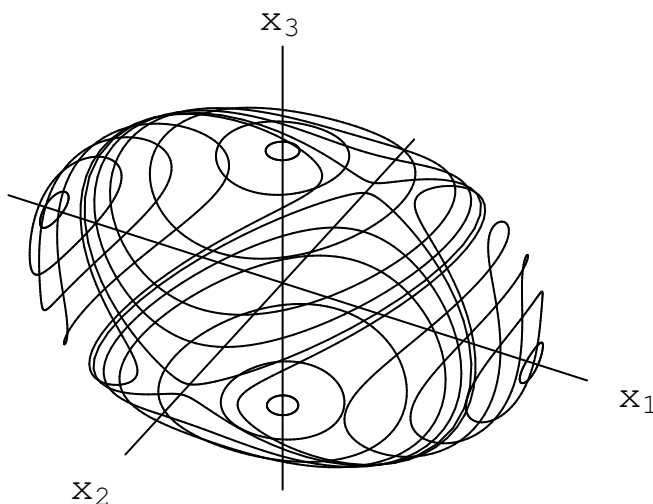
$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M^2. \quad (37.4)$$

Ti enačbi zadostujeta za več ugotovitev o naravi gibanja. Enačbi (37.3) in (37.4), v katerih nastopajo "koordinate"  $M_1$ ,  $M_2$  in  $M_3$ , lahko smatramo kot enačbi, ki podajata elipsoid s

polosmi  $\sqrt{2EI_1}$ ,  $\sqrt{2EI_2}$  in  $\sqrt{2EI_3}$ , ter kroglo s polmerom  $M$ . Ko se vektor  $\mathbf{M}$  premika glede na vztrajnostne osi vrtavke, se njegova konica giblje po presečišču obeh ploskev. Slika 50 prikazuje nekaj takšnih presečišč elipsoida s krogli različnih polmerov. Obstoj presečišč zagotavlja očitna neenačba

$$2EI_1 < M^2 < 2EI_3, \quad (37.5)$$

ki pomeni, da je polmer krogle (37.4) večji od najkrajše in manjši od najdaljše polosi.



Slika 50:

Oglejmo si, kako se te “poti” \* konice vektorja  $\mathbf{M}$  spremenijo, ko se spremeni  $M$  (pri isti vrednosti  $E$ ). Ko je  $M^2$  le malo večji od  $2EI_1$ , sta presek krogle z elipsoidom dve majhni sklenjeni krivulji okoli osi  $x_1$  blizu ustreznih polov elipsoida; ko gre  $M^2 \rightarrow 2EI_1$ , se ti krivulji skrčita v točki na polih. Ko  $M^2$  narašča, postaneta krivulji večji, pri vrednosti  $M^2 = 2EI_2$  pa dobimo dve ploski krivulji (elipsi), ki sekata pola elipsoida na osi  $x_2$ . Ko postane  $M^2$  še večji, ponovno dobimo dve sklenjeni krivulji, ki obkrožata pola na osi  $x_3$ ; ko gre  $M^2 \rightarrow 2EI_3$ , se krivulji ponovno skrčita v točki na polih.

Ker sta krivulji sklenjeni, mora biti gibanje vektorja  $\mathbf{M}$  glede na vrtavko periodično; v času ene periode oriše vektor  $\mathbf{M}$  neko konično ploskev in se vrne v začetni položaj.

Obstaja pa bistvena razlika, kar se tiče narave poti konice vektorja v bližini različnih polov elipsoida. V bližini polov  $x_1$  in  $x_3$  poti v celoti ležijo v bližini ustreznih polov. Tiste poti, ki potekajo v bližini pola  $x_2$ , pa se od polov močno oddaljijo. Ta razlika je posledica razlike v stabilnosti vrtenja vrtavke okoli svojih treh vztrajnostnih osi. Gibanje okoli osi  $x_1$  in  $x_3$  (ki ustrežata največjemu in najmanjšemu izmed treh vztrajnostnih momentov) sta stabilni, kar pomeni, da je v primeru, ko se vrtavka malo odkloni iz takšnega stanja, dobljeno gibanje podobno začetnemu. Vrtenje okoli osi  $x_2$  pa ni stabilno: majhen odmik zadostuje, da dobimo gibanje, pri katerem se vrtavka močno oddalji od začetne lege.

Časovno odvisnost komponent vektorja  $\mathbf{\Omega}$  (ali komponent vektorja  $\mathbf{M}$ , ki so sorazmerne s tistimi od vektorja  $\mathbf{\Omega}$ ) dobimo z uporabo Eulerjevih enačb (36.5). Komponenti  $\Omega_1$  in  $\Omega_3$

\*Krivulje, ki jih oriše krajišče vektorja  $\mathbf{\Omega}$ , imenujemo *polhode* (angl. *polhodes*).

izrazimo z  $\Omega_2$  s pomočjo enačb (37.2) in (37.3):

$$\begin{aligned}\Omega_1^2 &= [(2EI_3 - M^2) - I_2(I_3 - I_2)\Omega_2^2]/I_1(I_3 - I_1), \\ \Omega_3^2 &= [(M^2 - 2EI_1) - I_2(I_2 - I_1)\Omega_2^2]/I_3(I_3 - I_1).\end{aligned}\quad (37.6)$$

To vstavimo v drugo izmed enačb (36.5) in dobimo

$$\begin{aligned}d\Omega_2/dt &= (I_3 - I_1)\Omega_1\Omega_3/I_2 \\ &= \sqrt{[(2EI_3 - M^2) - I_2(I_3 - I_2)\Omega_2^2][(M^2 - 2EI_1) - I_2(I_2 - I_1)\Omega_2^2]}/I_2\sqrt{I_1I_3}.\end{aligned}\quad (37.7)$$

Z integracijo te enačbe dobimo funkcijo  $t(\Omega_2)$ , izraženo z eliptičnim integralom. V standardno obliko jo bomo spravili ob predpostavki, da je  $M^2 > 2EI_2$ ; v nasprotnem primeru, ko je  $M^2 < 2EI_2$ , moramo indeksa 1 in 3 v naslednjih izrazih zamenjati. Namesto  $t$  in  $\Omega_2$  vpeljemo novi spremenljivki:

$$\begin{aligned}\tau &= t\sqrt{(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)/I_1I_2I_3}, \\ s &= \Omega_2\sqrt{I_2(I_3 - I_2)/(2EI_3 - M^2)},\end{aligned}\quad (37.8)$$

in definiramo pozitiven parameter  $k^2 < 1$  z

$$k^2 = (I_2 - I_1)(2EI_3 - M^2)/(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1).\quad (37.9)$$

Dobimo

$$\tau = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}},$$

pri čemer smo izhodišče za merjenje časa postavili v trenutek, ko je  $\Omega_2 = 0$ . Ko ta integral obrnemo, dobimo Jacobijevo eliptično funkcijo  $s = \text{sn}\tau$ : to je  $\Omega_2$  v odvisnosti od časa;  $\Omega_1(t)$  in  $\Omega_3(t)$  sta algebraični funkciji količine  $\Omega_2(t)$  in sta podani z (37.6). Po definiciji je  $\text{cn}\tau = \sqrt{1 - \text{sn}^2\tau}$ ,  $\text{dn}\tau = \sqrt{1 - k^2\text{sn}^2\tau}$ . Z uporabo teh identitet dobimo

$$\left. \begin{aligned}\Omega_1 &= \sqrt{(2EI_3 - M^2)/I_1(I_3 - I_1)}\text{cn}\tau, \\ \Omega_2 &= \sqrt{(2EI_3 - M^2)/I_2(I_3 - I_2)}\text{sn}\tau, \\ \Omega_3 &= \sqrt{(M^2 - 2EI_1)/I_3(I_3 - I_1)}\text{dn}\tau.\end{aligned}\right\} \quad (37.10)$$

To so periodične funkcije, katerih perioda glede na spremenljivko  $\tau$  je  $4K$ , kjer je  $K$  popolni eliptični integral prve vrste:

$$K = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}.\quad (37.11)$$

Perioda glede na spremenljivko  $t$  je torej

$$T = 4K\sqrt{I_1I_2I_3/(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)}.\quad (37.12)$$

Po času  $T$  se vektor  $\mathbf{\Omega}$  vrne v svojo začetno lego glede na osi vrtavke. Vrtavka sama pa se ne vrne v svoj začetni položaj glede na nepremičen koordinatni sistem; glej spodaj.



Če je  $I_1 = I_2$ , se enačbe (37.10) poenostavijo v tiste, ki smo jih izpeljali v 36 za simetrično vrtavko: ko gre  $I_1 \rightarrow I_2$ , gre parameter  $k^2 \rightarrow 0$ , eliptične funkcije pa postanejo trigonometrične:  $\operatorname{sn}\tau \rightarrow \sin \tau$ ,  $\operatorname{cn}\tau \rightarrow \cos \tau$ ,  $\operatorname{dn}\tau \rightarrow 1$ , in dobimo enačbe (36.7).

Ko je  $M^2 = 2EI_3$ , velja  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ ,  $\Omega_3 = \text{konstanta}$ , zato je vektor  $\mathbf{\Omega}$  ves čas vzporeden z osjo  $x_3$ . Ta primer ustreza enakomernemu vrtenju vrtavke okoli osi  $x_3$ . Podobno imamo, v primeru ko je  $M^2 = 2EI_1$ , oprava z enakomernim vrtenjem okoli osi  $x_1$ .

Poiščimo sedaj absolutno gibanje vrtavke v prostoru, torej njeno gibanje glede na nepremični koordinatni sistem  $X, Y$  in  $Z$ . V ta namen bomo uporabili Eulerjeve kote  $\psi, \phi$  in  $\theta$  med osmi  $x_1, x_2, x_3$  vrtavke in osmi  $X, Y, Z$ , pri tem pa bomo postavili os  $Z$  v smeri konstantnega vektorja  $\mathbf{M}$ . Ker sta polarni kot in azimut osi  $Z$  glede na osi  $x_1, x_2, x_3$  enaka  $\theta$  oziroma  $\frac{1}{2}\pi - \psi$  (glej opombo v 35), ugotovimo, da so komponente vektorja  $\mathbf{M}$  vzdolž osi  $x_1, x_2, x_3$  enake

$$\left. \begin{aligned} M \sin \theta \sin \psi &= M_1 = I_1 \Omega_1, \\ M \sin \theta \cos \psi &= M_2 = I_2 \Omega_2, \\ M \cos \theta &= M_3 = I_3 \Omega_3. \end{aligned} \right\} \quad (37.13)$$

Zato je

$$\cos \theta = I_3 \Omega_3 / M, \quad \tan \psi = I_1 \Omega_1 / I_2 \Omega_2, \quad (37.14)$$

iz enačb (37.10) pa dobimo

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \sqrt{I_3(M^2 - 2EI_1) / M^2(I_3 - I_1)} \operatorname{dn}\tau, \\ \tan \psi &= \sqrt{I_1(I_3 - I_2) / I_2(I_3 - I_1)} \operatorname{cn}\tau / \operatorname{sn}\tau. \end{aligned} \quad (37.15)$$

Ti enačbi podajata kota  $\theta$  in  $\psi$  kot funkcijo časa; tako kot komponente vektorja  $\mathbf{\Omega}$  sta to periodični funkciji s periodo (37.12).

Kot  $\phi$  se v enačbah (37.13) ne pojavlja. Dobili ga bomo iz enačb (35.1), ki podajajo komponente vektorja  $\mathbf{\Omega}$ , izražene s časovnimi odvodi Eulerjevih kotov. Iz enačb  $\Omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$ ,  $\Omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi$  izločimo  $\dot{\theta}$  in dobimo  $\dot{\psi} = (\Omega_1 \sin \psi + \Omega_2 \cos \psi) / \sin \theta$ , od tod pa z uporabo enačb (37.13)

$$d\phi / dt = (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2) M / (I_1^2 \Omega_1^2 + I_2^2 \Omega_2^2). \quad (37.16)$$

Funkcijo  $\phi(t)$  lahko dobimo z integracijo, vendar integrand vsebuje eliptične funkcije na zapleten način. S pomočjo dokaj kompleksnih transformacij lahko integral izrazimo s funkcijami  $\theta$ ; izračune bomo izpustili, navedli pa bomo končni rezultat.

Funkcijo  $\phi(t)$  lahko zapišemo kot vsoto dveh členov (lahko pa dodamo še poljubno aditivno konstanto):

$$\phi(t) = \phi_1(t) + \phi_2(t). \quad (37.17)$$

Prvi člen dobimo iz

$$\exp[2i\phi_1(t)] = \theta_{01} \left( \frac{2t}{T} - i\alpha \right) / \theta_{01} \left( \frac{2t}{T} + i\alpha \right), \quad (37.18)$$

kjer je  $\theta_{01}$  funkcija  $\theta$ ,  $\alpha$  pa realna konstanta, za katero velja

$$\operatorname{sn}(2i\alpha K) = i \sqrt{I_3(M^2 - 2EI_1) / I_1(2EI_3 - M^2)}; \quad (37.19)$$

konstanti  $K$  in  $T$  sta podani z (37.11) in (37.12). Funkcija na desni strani (37.18) je periodična s periodo  $\frac{1}{2}T$ , zato se  $\phi_1(t)$  spremeni za  $2\pi$  v času  $T$ . Drugi člen v (37.17) je

$$\phi_2(t) = 2\pi t/T', \quad \frac{1}{T'} = \frac{M}{2\pi I_1} - \frac{i}{\pi T} \frac{\theta_{01}'(i\alpha)}{\theta_{01}(i\alpha)}. \quad (37.20)$$

Ta funkcija se poveča za  $2\pi$  v času  $T'$ . Zato je spreminjanje količine  $\phi$  kombinacija dveh periodičnih gibanj, enega s periodo ( $T$ ), ki je enaka periodi spreminjanja kotov  $\psi$  in  $\theta$ , in drugega s periodo ( $T'$ ), ki je s prvo nekomenzurabilna. Zaradi te nekomenzurabilnosti se vrtavka nikoli ne povrne natančno v svojo začetno lego.

## NALOGE

NALOGA 1. Opiši prosto vrtenje vrtavke okoli osi, ki je blizu osi  $x_3$  in  $x_1$ .

*Rešitev:* Naj leži os  $x_3$  v smeri, ki je podobna smeri vektorja  $\mathbf{M}$ . Tedaj sta komponenti  $M_1$  in  $M_2$  majhni količini in približno velja  $M_3 = M$  (do prvega reda natančno). V okviru istega približka lahko prvi Eulerjevi enačbi (36.5) zapišemo kot  $dM_1/dt = \Omega_0 M_2 (1 - I_3/I_2)$ ,  $dM_2/dt = \Omega_0 M_1 (I_3/I_1 - 1)$ , kjer je  $\Omega_0 = M/I_3$ . Kot običajno iščemo rešitvi za  $M_1$  in  $M_2$ , ki sta sorazmerni z  $\exp(i\omega t)$ . Tako dobimo frekvenco

$$\omega = \Omega_0 \sqrt{\left(\frac{I_3}{I_1} - 1\right) \left(\frac{I_3}{I_2} - 1\right)}. \quad (1)$$

Rešitvi  $M_1$  in  $M_2$  sta

$$M_1 = Ma \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \cos \omega t, \quad M_2 = Ma \sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} \sin \omega t, \quad (2)$$

kjer je  $a$  poljubna majhna konstanta. Ti enačbi opisujeta gibanje vektorja  $\mathbf{M}$  glede na vrtavko. Na sliki 50 krajšiče vektorja  $\mathbf{M}$  s frekvenco  $\omega$  izrisuje majhno elipso okoli pola na osi  $x_3$ .

Absolutno gibanje vrtavke v prostoru dobimo, če izračunamo Eulerjeve kote. V tem primeru je kot  $\theta$  med osjo  $x_3$  in osjo  $Z$  (v smeri vektorja  $\mathbf{M}$ ) majhen in s pomočjo enačb (37.14) dobimo  $\tan \psi = M_1/M_2$ ,  $\theta^2 \approx 2(1 - \cos \theta) = 2(1 - M_3/M) \approx (M_1^2 + M_2^2)/M^2$ ; vstavimo (2) in sledi

$$\begin{aligned} \tan \psi &= \sqrt{I_1(I_3 - I_2)/I_2(I_3 - I_1)} \cot \omega t, \\ \theta^2 &= a^2 \left[ \left(\frac{I_3}{I_2} - 1\right) \cos^2 \omega t + \left(\frac{I_3}{I_1} - 1\right) \sin^2 \omega t \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Kot  $\phi$  določimo z uporabo tretje enačbe (35.1). Za  $\theta \ll 1$  velja  $\Omega_0 \approx \Omega_3 \approx \dot{\psi} + \dot{\phi}$ . Zato je

$$\phi = \Omega_0 t - \psi, \quad (4)$$

pri čemer smo izpustili poljubno integracijsko konstanto.

Boljšo predstavo o gibanju vrtavke dobimo, če izračunamo spreminjanje smeri vseh treh vztrajnostnih osi. Naj bodo  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$  in  $\mathbf{n}_3$  enotski vektorji vzdolž teh osi. Vektorja  $\mathbf{n}_1$  in  $\mathbf{n}_2$  se enakomerno vrtita v ravnini  $XY$  s frekvenco  $\Omega_0$ , sočasno pa malo nihata v prečni smeri s frekvenco  $\omega_0$ . To nihanje opišemo s komponentama vektorjev v smeri osi  $Z$ :

$$n_{1Z} \approx M_1/M = a \sqrt{I_3/I_2 - 1} \cos \omega t,$$

$$n_{2Z} \approx M_2/M = a \sqrt{I_3/I_1 - 1} \sin \omega t.$$

Za vektor  $\mathbf{n}_3$  v istem približku velja  $n_{3X} \approx \theta \sin \phi$ ,  $n_{3Y} \approx -\theta \cos \phi$ ,  $n_{3Z} \approx 1$ . (Polarni kot in azimut vektorja  $\mathbf{n}_3$  glede na osi  $X, Y, Z$  sta  $\theta$  in  $\phi - \frac{1}{2}\pi$ ; glej opombo v § 35.) Z uporabo enačb (37.13) lahko zapišemo

$$\begin{aligned} n_{3x} &= \theta \sin(\Omega_0 t - \psi) \\ &= \theta \sin \Omega_0 t \cos \psi - \theta \cos \Omega_0 t \sin \psi \\ &= (M_2/M) \sin \Omega_0 t - (M_1/M) \cos \Omega_0 t \\ &= a \sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} \sin \Omega_0 t \sin \omega t - a \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \cos \Omega_0 t \cos \omega t \\ &= -\frac{1}{2}a \left[ \sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} + \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \right] \cos(\Omega_0 + \omega)t + \\ &\quad + \frac{1}{2}a \left[ \sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} - \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \right] \cos(\Omega_0 - \omega)t. \end{aligned}$$

Podobno dobimo

$$\begin{aligned} n_{3y} &= -\frac{1}{2}a \left[ \sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} + \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \right] \sin(\Omega_0 + \omega)t + \\ &\quad + \frac{1}{2}a \left[ \sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} - \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \right] \sin(\Omega_0 - \omega)t. \end{aligned}$$

Od tod je razvidno, da je gibanje  $\mathbf{n}_3$  superpozicija dveh vrtenj okoli osi  $Z$  s frekvencama  $\Omega_0 \pm \omega$ .

**NALOGA 2.** Opiši prosto vrtenje vrtavke, za katero velja  $M^2 = 2EI_2$ .

*Rešitev:* Ta primer ustreza gibanju krajišča vektorja  $\mathbf{M}$  po krivulji, ki poteka skozi pola na osi  $x_2$  (slika 50). Enačba (37.7) se sedaj zapiše kot  $ds/d\tau = 1 - s^2$ ,  $\tau = t\sqrt{(I_2 - I_1)(I_3 - I_2)}/I_1 I_3 \Omega_0$ ,  $s = \Omega_2/\Omega_0$ , kjer je  $\Omega_0 = M/I_2 = 2E/M$ . To enačbo integriramo in uporabimo enačbe (37.6). Dobimo

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \Omega_0 \sqrt{I_2(I_3 - I_2)/I_1(I_3 - I_1)} \operatorname{sech} \tau, \\ \Omega_2 &= \Omega_0 \tanh \tau, \\ \Omega_3 &= \Omega_0 \sqrt{I_2(I_2 - I_1)/I_3(I_3 - I_1)} \operatorname{sech} \tau. \end{aligned} \tag{1}$$

Absolutno gibanje vrtavke opišemo s pomočjo Eulerjevih kotov, pri čemer  $\theta$  definiramo kot kot med osjo  $Z$  (smer vektorja  $\mathbf{M}$ ) in osjo  $x_2$  (in ne os  $x_3$  kot v prejšnji nalogi). V enačbah (37.14) in (37.16), ki med seboj povezujeta vektor  $\boldsymbol{\Omega}$  in Eulerjeve kote, moramo ciklično zamenjati indekse 1, 2, 3 v 3, 1, 2. Ko (1) vstavimo v ti enačbi, dobimo  $\cos \theta = \tanh \tau$ ,  $\phi = \Omega_0 t + \text{konstanta}$ ,  $\tan \psi = \sqrt{I_3(I_2 - I_1)/I_1(I_3 - I_2)}$ .

Iz teh enačb je razvidno, da se s  $t \rightarrow \infty$  vektor  $\boldsymbol{\Omega}$  asimptotično približuje osi  $x_2$ , ki se tudi sama asimptotično približuje osi  $Z$ .

## §38 Toga telesa, ki se dotikajo

Gibalni enačbi (34.1) in (34.3) kažeta, da lahko pogoje za ravnovesje togega telesa zapišemo kot

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{K} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f} = 0, \tag{38.1}$$

kar pomeni, da morata biti skupna sila in skupni navor na telo enaka nič. Seštevamo po vseh zunanjih silah, ki delujejo na telo,  $\mathbf{r}$  pa so krajevni vektorji točk, v katerih sile “prijemajo”; izhodišče, glede na katerega računamo navor, si lahko poljubno izberemo, saj vrednost navora  $\mathbf{K}$  od te izbire ni odvisna, kadar je  $\mathbf{F} = 0$  (glej (34.5)).

Če imamo sistem togih teles, ki se dotikajo, morajo v ravnovesju pogoji (38.1) veljati za vsako telo posebej. Pri silah moramo upoštevati tudi tiste, s katerimi na neko telo delujejo druga telesa, ki se ga dotikajo. Te sile, ki prijemajo v dotikalniščih, imenujemo *vzajemne sile* ali *reakcije*. Očitno je, da sta vzajemni sili med dvema telesi enaki po velikost, a nasprotnih smeri.

V splošnem lahko določimo velikosti in smeri vzajemnih sil tako, da hkrati rešimo gibalne enačbe (38.1) za vsa telesa. V nekaterih primerih lahko smeri vzajemnih sil ugotovimo iz pogojev naloge. Če lahko na primer dve telesi prosto drsita eno po drugem, je vzajemna sila med njima pravokotna na površino telesa.

Če se dve telesi v stiku gibljeta eno glede na drugo, potem moramo poleg vzajemnih sil upoštevati tudi disipacijske sile *trenja*.

Obstajata dve vrsti gibanja teles, ki se stikajo – *drsenje* in *kotaljenje*. Pri drsenju je vzajemna sila pravokotna na površine, ki se dotikajo, trenje pa je tangentno. Pri pravemu kotaljenju pa se telesi v točki stika ne gibljeta eno glede na drugo; mislimo si lahko, da je kotaleče se telo ob vsakem trenutku pritrjeno na podlago v točki stika. Vzajemna sila lahko kaže v poljubno smer in ni nujo pravokotna na površino. Trenje pri kotaljenju deluje kot dodatni navor, ki nasprotuje kotaljenju.

Če je pri drsenju trenje zanemarljivo majhno, rečemo, da sta površini, ki sta v stiku, *popolnoma gladki*. Če pa je mogoče le čisto kotaljenje brez drsenja, in če lahko pri kotaljenju zanemarimo trenje, potem rečemo, da sta površini *popolnoma hrapavi*.

V obeh primerih nimamo eksplicitno opravlja s silami trenja, zato naloga spada na področje mehanike. Če pa so lastnosti trenja pri določanju gibanja ključnega pomena, potem to ni povsem mehanski proces (glej 25).

Stik dveh teles zmanjša število prostostnih stopenj v primerjavi s prostim gibanjem. V nadaljevanju bomo pri obravnavi takšnih nalog izkoristili to poenostavitev tako, da bomo uporabljali koordinate, ki neposredno upoštevajo dejansko število prostostnih stopenj. Vseeno pa se lahko pri kotaljenju zgodi, da je takšna izbira nemogoča.

Pri kotaljenju teles mora biti izpolnjen pogoj, da so hitrosti točk, ki se dotikajo, enake; ko se na primer telo kotali po nepremični površini, mora biti hitrost v stičišču enaka nič. V splošnem ta pogoj zapišemo z *enačbami vezi*, ki so oblike

$$\sum_i c_{\alpha i} \dot{q}_i = 0, \quad (38.2)$$

kjer so  $c_{\alpha i}$  funkcije, ki so odvisne le od koordinat, z indeksom  $\alpha$  pa oštevilčimo enačbe. Če leve strani teh enačb niso totalni časovni odvodi funkcij, ki so odvisne le od koordinat, teh enačb ne moremo integrirati. To pomeni, da pogojev ne moremo poenostaviti na zveze med koordinatami, s katerimi bi lahko izrazili položaje teles z manjšim številom koordinat, ki bi bilo enako dejanskemu številu prostostnih stopenj. Takšne vezi imenujemo *neholonomske*, v nasprotju s *holonomskimi* vezmi, ki se lahko poenostavijo na zveze, kjer nastopajo izključno koordinate.

Kot primer si oglejmo kotaljenje krogle po ravni površini. Naj bo  $\mathbf{V}$  premočrtna hitrost (hitrost središča krogle),  $\boldsymbol{\Omega}$  pa kotna hitrost vrtenja. Hitrost točke v stiku z ravnino dobimo,

če vstavimo  $\mathbf{r} = -a\mathbf{n}$  v splošno enačbo  $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ ;  $a$  je polmer krogle,  $\mathbf{n}$  pa enotski vektor, ki je pravokoten na površino. Pogoj za kotaljenje je, da točka stičišča ne drsi, torej

$$\mathbf{V} - a\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n} = 0. \quad (38.3)$$

Te enačbe ne moremo integrirati: čeprav je hitrost  $\mathbf{V}$  totalni časovni odvod krajevnega vektorja središča krogle, kotna hitrost v splošnem ni totalni odvod po času funkcije koordinat. Pogoj (38.3) zato ni holonomski. \*

Ker z enačbami neholonomskih vezi ne moremo zmanjšati števila koordinat, moramo v takšnih primerih uporabiti koordinate, ki niso vse med seboj neodvisne. Na poti do ustreznih Lagrangevih enačb se bomo najprej vrnil k načelu najmanjše akcije.

Pogoji (38.2) omejujejo možne variacije koordinat: enačbe (38.2) pomnožimo z  $\delta t$  in ugotovimo, da variacije  $\delta q_i$  niso neodvisne, temveč so povezane z

$$\sum_i c_{\alpha i} \delta q_i = 0. \quad (38.4)$$

Pogoje moramo upoštevati, ko variiramo akcijo. Po Lagrangevi metodi iskanja pogojnih ekstremov moramo k integrandu v variaciji akcije

$$\delta S = \int \sum_i \delta q_i \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] dt$$

prišteti leve strani enačb (38.4), pomnožene z neznanimi koeficienti  $\lambda_\alpha$  (ki so funkcije koordinat), nato pa integral izenačiti z nič. Pri tem smemo variacije  $\delta q_i$  smatrati kot povsem neodvisne, rezultat pa je

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_\alpha \lambda_\alpha c_{\alpha i}. \quad (38.5)$$

Te enačbe, skupaj z vezmi (38.2), tvorijo sistem enačb za neznanke  $q_i$  in  $\lambda_\alpha$ .

Vzajemne sile v tej obravnavi ne nastopajo, stik med telesi pa je upoštevan preko enačb vezi. Obstaja pa drugačna metoda, ki nas pripelje do gibalnih enačb za telesa, ki se dotikajo, v katerih se vzajemne sile eksplicitno pojavljajo. Bistvena značilnost te metode, ki jo včasih imenujemo *d'Alembertovo načelo*, je ta, da za vsako izmed teles, ki se dotikajo, zapišemo enačbe

$$d\mathbf{P}/dt = \sum \mathbf{f}, \quad d\mathbf{M}/dt = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f}, \quad (38.6)$$

kjer so  $\mathbf{f}$  sile, ki delujejo na telo, vključno z vzajemnimi silami. Te na začetku niso znane in jih določimo sočasno z gibanjem telesa, tako da rešimo enačbe. Ta pristop je uporaben tako za holonomske kot neholonomske vezi.

## NALOGE

NALOGA 1. Z uporabo d'Alembertovega načela poišči gibalne enačbe homogene krogle, ki se kotali po površini pod vplivom zunanje sile  $\mathbf{F}$  in navora  $\mathbf{K}$ .

\*Podoben pogoj pri kotaljenju valja pa je holonomski. V tem primeru ima os vrtenja nespremenljivo smer v prostoru, zato je  $\Omega = d\phi/dt$  totalni odvod kota zasuka valja okoli svoje osi  $\phi$ . Pogoj (38.3) lahko torej integriramo in tako dobimo zvezo med kotom  $\phi$  in koordinato težišča.

*Rešitev:* Enačba vezi je (38.3). Silo podlage na kroglo v njenem dotikališču z ravnino označimo z  $\mathbf{R}$  in zapišemo enačbi (38.6) kot

$$\mu d\mathbf{V}/dt = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \quad (1)$$

$$I d\boldsymbol{\Omega}/dt = \mathbf{K} - a\mathbf{n} \times \mathbf{R}, \quad (2)$$

kjer smo upoštevali, da je  $\mathbf{P} = \mu\mathbf{V}$ , in da za kroglasto vrtavko velja  $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\Omega}$ . Če enačbo vezi (38.3) odvajamo po času, dobimo  $\dot{\mathbf{V}} = a\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{n}$ . To vstavimo v enačbo (1) in  $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$  odpravimo z uporabo enačbe (2). Dobimo izraz  $(I/a\mu)(\mathbf{F} + \mathbf{R}) = \mathbf{K} \times \mathbf{n} - a\mathbf{R} + a\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R})$ , ki med seboj povezuje  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{F}$  in  $\mathbf{K}$ . Ko to enačbo razpišemo po komponentah in vanjo vstavimo  $I = \frac{2}{5}\mu a^2$  (§ 32, naloga 2(b)), dobimo

$$R_x = \frac{5}{7a}K_y - \frac{2}{7}F_x, \quad R_y = -\frac{5}{7a}K_x - \frac{2}{7}F_y, \quad R_z = -F_z,$$

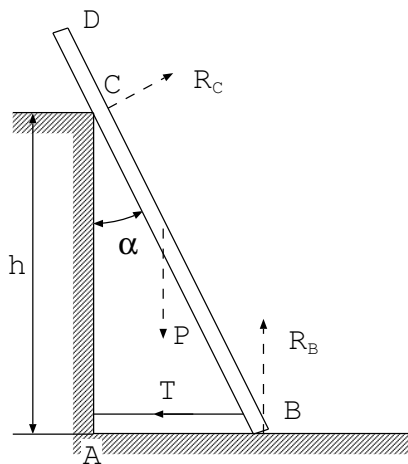
pri čemer smo privzeli, da ravnina, po kateri se krogla kotali, leži v ravnini  $(xy)$ . Končno te izraze vstavimo v (1) in dobimo gibalne enačbe, v katerih nastopa le podana zunanja sila in navor:

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{5}{7\mu} \left( F_x + \frac{K_y}{a} \right),$$

$$\frac{dV_y}{dt} = \frac{5}{7\mu} \left( F_y - \frac{K_x}{a} \right).$$

Komponenti  $\Omega_x$  in  $\Omega_y$  kotne hitrosti sta podani s komponentama  $V_x$  in  $V_y$  z enačbo vezi (38.3); za  $\Omega_z$  pa imamo enačbo  $\frac{2}{5}\mu a^2 d\Omega_z/dt = K_z$ , kar je komponenta v smeri  $z$  enačbe (2).

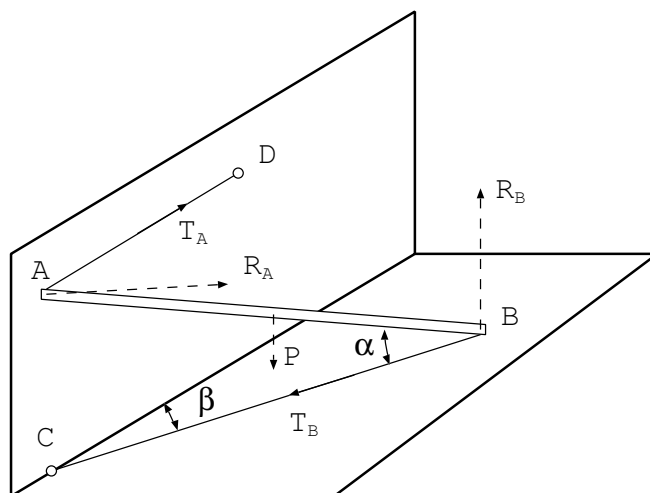
**NALOGA 2.** Enakomerna palica  $BD$  s težo  $P$ , ki je dolga  $l$ , sloni na zidu, kot je prikazano na sliki 51, njeno spodnje krajišče  $B$  pa je pritrjeno z vrvico  $AB$ . Poišči silo, s katero zid deluje na palico, in napetost vrvice.



Slika 51:

*Rešitev:* Silo teže na palico lahko ponazorimo s silo  $P$  s prijemašiščem v težišču palice, ki kaže navpično navzdol. Smeri sil podlage  $R_B$  in  $R_C$  kažeta navpično navzgor in pravokotno na palico; sila, ki jo povzroča napetost v vrvi, kaže od  $B$  proti  $A$ . Rešitev enačb za ravnovesje nam da  $R_C = (Pl/4h) \sin 2\alpha$ ,  $R_B = P - R_C \sin \alpha$ ,  $T = R_C \cos \alpha$ .

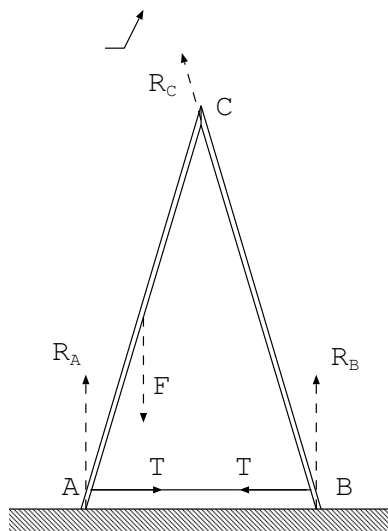
**NALOGA 3.** Palica s težo  $P$  ima eno krajišče  $A$  na navpični ravnini, drugo krajišče  $B$  na vodoravni ravnini (slika 52), na mestu pa jo držita dve vodoravni vrvici  $AD$  in  $BC$ , pri čemer slednja leži v isti navpični ravnini kot  $AB$ . Določi sile podlage in napetosti v vrvicah.



Slika 52:

*Rešitev:* Napetosti  $T_A$  in  $T_B$  povzročata sili od  $A$  proti  $D$  oziroma od  $B$  proti  $C$ . Sili podlage  $R_A$  in  $R_B$  sta pravokotni na ustrezni ravnini. Rešitev enačb za ravnovesje je  $R_B = P$ ,  $T_B = \frac{1}{2}P \cot \alpha$ ,  $R_A = T_B \sin \beta$  in  $T_A = T_B \cos \beta$ .

NALOGA 4. Dve palici dolžine  $l$  z zanemarljivo maso sta gibljivo pripeti skupaj, njuni krajišči pa sta privezani z vrvico  $AB$  (slika 53). Palici stojita na ravnini, v središčno točko ene izmed njiju pa deluje sila  $F$ . Določi sile podlage (vzajemne sile) na palico.



Slika 53:

*Rešitev:* Napetost  $T$  ustvarja silo v točki  $A$ , ki kaže od  $A$  proti  $B$  in silo v točki  $B$ , ki kaže od  $B$  proti  $A$ . Sili podlage  $R_A$  in  $R_B$  v točkah  $A$  in  $B$  kažeta navpično navzgor. Naj bo  $R_C$  sila na palico  $AC$  v točki vpetja; tedaj na palico  $BC$  deluje vzajemna sila  $-R_C$ . Pogoji, da je vsota navorov sil  $R_B$ ,  $T$  in  $-R_C$  na palico  $BC$  enaka nič, nam pove, da sila  $R_C$  deluje v smeri  $BC$ . Ostali pogoji za ravnovesje (za vsako palico posebej) nam dajo  $R_A = \frac{3}{4}F$ ,  $R_B = \frac{1}{4}F$ ,  $R_C = \frac{1}{4}F \operatorname{cosec} \alpha$ ,  $T = \frac{1}{4}F \cot \alpha$ , kjer je  $\alpha$

kot  $CAB$ .

### §39 Gibanje v neinercialnem opazovalnem sistemu

Do sedaj smo pri obravnavi mehanskih sistemov vedno uporabljali inercialne opazovalne sisteme. Lagrangeva funkcija

$$L_0 = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2 - U, \quad (39.1)$$

in ustrezna gibalna enačba  $m d\mathbf{v}_0/dt = -\partial U/\partial \mathbf{r}$  za delec v zunanem polju veljata na primer izključno v inercialnem opazovalnem sistemu. (V tem razdelku z indeksom 0 označujemo količine v inercialnem opazovalnem sistemu.)

Sedaj pa si oglejmo, kako se glasijo gibalne enačbe v neinercialnem opazovalnem sistemu. Ponovno se bomo naloge lotili z načelom najmanjše akcije, katerega veljavnost je neodvisna od opazovalnega sistema. Lagrangeve enačbe

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \quad (39.2)$$

so prav tako veljavne, vendar Lagrangeva funkcija nima več oblike (39.1). Novo funkcijo bomo dobili z ustrezno transformacijo funkcije  $L_0$ .

Pretvorba poteka v dveh korakih. Najprej si oglejmo opazovalni sistem  $K'$ , ki se giblje s premočrtno hitrostjo  $\mathbf{V}(t)$  glede na inercialni sistem  $K_0$ . Hitrosti delca  $\mathbf{v}_0$  in  $\mathbf{v}'$  v sistemih  $K_0$  in  $K'$  sta povezana z

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}' + \mathbf{V}(t). \quad (39.3)$$

To vstavimo v (39.1) in dobimo Lagrangevo funkcijo v  $K'$ :

$$L' = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 + m\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2}m\mathbf{V}^2 - U.$$

Količina  $\mathbf{V}^2(t)$  je funkcija časa in jo zato lahko zapišemo kot totalni odvod po času neke druge funkcije; tretji člen v  $L'$  lahko torej izpustimo. Poleg tega je  $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt$ , kjer je  $\mathbf{r}'$  krajevni vektor delca v sistemu  $K'$ . Od tod sledi

$$m\mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{v}' = m\mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}'/dt = d(m\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}')/dt - m\mathbf{r}' \cdot d\mathbf{V}/dt.$$

To vstavimo v Lagrangevo funkcijo in ponovno izpustimo člen, ki je totalni odvod po času, in končno dobimo

$$L' = \frac{1}{2}mv'^2 - m\mathbf{W}(t) \cdot \mathbf{r}' - U, \quad (39.4)$$

kjer je  $\mathbf{W} = d\mathbf{V}/dt$  premočrtni pospešek opazovalnega sistema  $K'$ .

Lagrangeva enačb, ki jo dobimo iz (39.4), se glasi

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}'} - m\mathbf{W}(t). \quad (39.5)$$

Pospešeno premočrtno gibanje opazovalnega sistema je torej enakovredno (kar se tiče gibalne enačbe delca) delovanju homogenega polja sile, ki je enaka masi delca, pomnoženi s pospeškom  $\mathbf{W}$ , v smeri, ki je obratna smeri pospeška.



V obravnavo vključimo sedaj še opazovalni sistem  $K$ , katerega izhodišče sovpada z izhodiščem sistema  $K'$  in ki se vrti glede na  $K'$  s kotno hitrostjo  $\boldsymbol{\Omega}(t)$ . Zato se  $K$  giba glede na inercialni sistem  $K_0$  tako premo (translacijsko) kot vrtilno (rotacijsko).

Hitrost delca  $\mathbf{v}'$  v sistemu  $K'$  ima dva prispevka: hitrost  $\mathbf{v}$  glede na  $K$  in hitrost  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ , ker se delec vrti sočasno s sistemom  $K$ :  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  (ker krajevna vektorja  $\mathbf{r}$  in  $\mathbf{r}'$  v sistemih  $K$  in  $K'$  sovpadata). To vstavimo v Lagrangevo funkcijo (39.4) in dobimo

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + m\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - m\mathbf{W} \cdot \mathbf{r} - U. \quad (39.6)$$

To je splošna oblika Lagrangeve funkcije delca v poljubnem opazovalnem sistemu, ki ni nujno inercialen. Zaradi vrtenja opazovalnega sistema dobimo v Lagrangevi funkcij člen, ki je sorazmeren s hitrostjo delca.

Odvide, ki se pojavljajo v Lagrangevi funkciji, bomo izračunali tako, da najprej zapišemo totalni diferencial:

$$\begin{aligned} dL &= m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} + m d\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + m\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega} \times d\mathbf{r} + \\ &+ m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times d\mathbf{r}) - m\mathbf{W} \cdot d\mathbf{r} - (\partial U / \partial \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} + m d\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + m d\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} + \\ &+ m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\Omega} \cdot d\mathbf{r} - m\mathbf{W} \cdot d\mathbf{r} - (\partial U / \partial \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Iz členov sorazmernih z  $d\mathbf{v}$  in  $d\mathbf{r}$  dobimo

$$\begin{aligned} \partial L / \partial \mathbf{v} &= m\mathbf{v} + m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \\ \partial L / \partial \mathbf{r} &= m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} + m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\Omega} - m\mathbf{W} - \partial U / \partial \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Ta izraza vstavimo v (39.2) in dobimo iskano gibalno enačbo:

$$m d\mathbf{v} / dt = -\partial U / \partial \mathbf{r} - m\mathbf{W} + m\mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}} + 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} + m\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}). \quad (39.7)$$

“Inercijske sile” zaradi vrtenja opazovalnega sistema so tri. Sila  $m\mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}}$  nastane zaradi neenakomernosti vrtenja, drugi dve pa obstajata tudi, ko je vrtenje enakomerno. Sila  $2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}$  se imenuje *Coriolisova sila*; v nasprotju z vsemi ostalimi (nedisipacijskimi) silami, ki smo jih do sedaj srečali, je ta odvisna od hitrosti delca. Sila  $m\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega})$  se imenuje *centrifugalna sila*. Leži v ravnini, napeti na vektorjih  $\mathbf{r}$  in  $\boldsymbol{\Omega}$ , pravokotna je na os vrtenja (torej na  $\boldsymbol{\Omega}$ ) in je usmerjena stran od osi. Velikost te sile je  $m\rho\Omega^2$ , kjer je  $\rho$  oddaljenost delca od osi vrtenja.

Oglejmo si posebni primer enakomernega vrtenja brez premočrtnega pospeška. V (39.6) in (39.7) vstavimo  $\boldsymbol{\Omega} = \text{konstanta}$  in  $\mathbf{W} = 0$  in dobimo Lagrangevo funkcijo

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + m\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - U \quad (39.8)$$

in gibalno enačbo

$$m d\mathbf{v} / dt = -\partial U / \partial \mathbf{r} + 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} + m\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}). \quad (39.9)$$

Energijo delca v tem primeru dobimo tako, da vstavimo

$$\mathbf{p} = \partial L / \partial \mathbf{v} = m\mathbf{v} + m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (39.10)$$

v  $E = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L$ , in dobimo

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 + U. \quad (39.11)$$

Opazimo, da energija ne vsebuje člena, ki bi bil linearen v hitrosti. Vrtenje opazovalnega sistema k energiji prispeva člen, ki je odvisen le od koordinat delca in je sorazmeren s kvadratom kotne hitrosti. Dodatni člen  $-\frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2$  se imenuje *centrifugalna potencialna energija*.

Hitrost delca  $\mathbf{v}$  glede na enakomerno vrteči se opazovalni sistem je povezan s hitrostjo  $\mathbf{v}_0$  glede na inercialni opazovalni sistem  $K_0$  z enačbo

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}. \quad (39.12)$$

Gibalna količina  $\mathbf{p}$  (39.10) delca v sistemu  $K$  je zato enaka gibalni količini  $\mathbf{p}_0 = m\mathbf{v}_0$  v sistemu  $K_0$ . Vrtilni količini  $\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{p}_0$  in  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  sta tudi enaki. Energiji delca v obeh sistemih pa se razlikujeta. Hitrost  $\mathbf{v}$  iz (39.12) vstavimo v (39.11) in dobimo  $E = \frac{1}{2}mv_0^2 - m\mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + U = \frac{1}{2}mv_0^2 + U - m\mathbf{r} \times \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\Omega}$ . Prva člena sta enaka energiji delca  $E_0$  v sistemu  $K_0$ . Z vrtilno količino  $\mathbf{M}$  zapišemo

$$E = E_0 - \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (39.13)$$

Ta enačba podaja zakon za transformacijo energije, ko se preselimo v enakomerno vrteči se sistem. Čeprav smo zakon izpeljali za en sam delec, lahko izpeljavo takoj posplošimo na poljuben sistem delcev, pri čemer dobimo isto enačbo (39.13).

## NALOGE

NALOGA 1. Določi odklon od navpične osi telesa v prostem padu zaradi vrtenja Zemlje. Predpostavi, da je kotna hitrost vrtenja majhna.

*Rešitev:* V težnostnem polju je  $U = -m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}$ , kjer je  $\mathbf{g}$  vektor težnostnega pospeška; če v enačbi (39.9) zanemarimo centrifugalno silo, ker ta vsebuje kvadrat majhne količine  $\boldsymbol{\Omega}$ , dobimo gibalno enačbo

$$\dot{\mathbf{v}} = 2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{g}. \quad (1)$$

To enačbo lahko rešimo z zaporednimi približki. Zapišemo  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ , kjer je  $\mathbf{v}_1$  rešitev enačbe  $\dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{g}$ , torej  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{g}t + \mathbf{v}_0$  ( $\mathbf{v}_0$  je začetna hitrost). V (1) vstavimo  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ , na desni strani obdržimo le  $\mathbf{v}_1$  in za  $\mathbf{v}_2$  dobimo enačbo  $\dot{\mathbf{v}}_2 = 2\mathbf{v}_1 \times \boldsymbol{\Omega} = 2t\mathbf{g} \times \boldsymbol{\Omega} + 2\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\Omega}$ . Z integracijo dobimo

$$\mathbf{r} = \mathbf{h} + \mathbf{v}_0t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 + \frac{1}{3}t^3\mathbf{g} \times \boldsymbol{\Omega} + t^2\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\Omega}, \quad (2)$$

kjer je  $\mathbf{h}$  začetni položaj telesa.

Naj os  $z$  kaže navpično navzgor, os  $x$  pa proti polu; tedaj je  $g_x = g_y = 0$ ,  $g_z = -g$ ,  $\Omega_x = \Omega \cos \lambda$ ,  $\Omega_y = 0$ ,  $\Omega_z = \Omega \sin \lambda$ , kjer je  $\lambda$  zemljepisna širina (ki naj leži na severni polobli). V (2) vstavimo  $\mathbf{v}_0 = 0$ . Dobimo  $x = 0$ ,  $y = -\frac{1}{3}t^3g\Omega \cos \lambda$ . Vstavimo čas padanja  $t \approx \sqrt{2h/g}$  in končno dobimo  $x = 0$ ,  $y = -\frac{1}{3}(2h/g)^{3/2}g\Omega \cos \lambda$ . Negativni predznak pove, da se telo ukloni proti vzhodu.

NALOGA 2. Določi odklon iz ravnine telesa, ki smo ga s površja Zemlje vrgli s hitrostjo  $\mathbf{v}_0$ .

*Rešitev:* Naj hitrost  $\mathbf{v}_0$  leži v ravnini ( $xz$ ). Začetna višina je  $h = 0$ . Bočni odklon je podan z drugo enačbo v prvi nalogi:  $y = -\frac{1}{3}t^3g\Omega_x + t^2(\Omega_x v_{0z} - \Omega_z v_{0x})$ . Ko vstavimo čas leta  $t \approx 2v_{0z}/g$ , dobimo  $y = 4v_{0z}^2(\frac{1}{3}v_{0z}\Omega_x - v_{0x}\Omega_z)/g^2$ .

NALOGA 3. Kakšen je vpliv vrtenja Zemlje na nihanje nihala (to je problem *Foucaultjevega nihala*).  
*Rešitev:* Če navpične premike nihala smatramo kot majhno količino drugega reda in jo zanemarimo, lahko gibanje nihala obravnavamo kot vodoravno ravninsko gibanje v ravnini  $xy$ . Izpustimo člene z  $\Omega^2$  in dobimo gibalni enačbi  $\ddot{x} + \omega^2 x = 2\Omega_z \dot{y}$  in  $\ddot{y} + \omega^2 y = -2\Omega_z \dot{x}$ , kjer je  $\omega$  frekvenca nihala, če zanemarimo vrtenje Zemlje. Drugo enačbo pomnožimo z  $i$  in jo prištejemo k prvi. Dobimo eno samo enačbo  $\ddot{\xi} + 2i\Omega_z \dot{\xi} + \omega^2 \xi = 0$  za kompleksno količino  $\xi = x + iy$ . Za  $\Omega_z \ll \omega$  je rešitev te enačbe

$$\xi = \exp(-i\Omega_z t)[A_1 \exp(i\omega t) + A_2 \exp(-i\omega t)]$$

ali

$$x + iy = (x_0 + iy_0) \exp(-i\Omega_z t),$$

kjer funkciji  $x_0(t), y_0(t)$  opisujeta gibanje nihala, če se Zemlja ne bi vrtela. Učinek vrtenja Zemlje je torej ta, da se pot okoli navpičnice vrti s kotno hitrostjo  $\Omega_z$ .

## Poglavje 7

# Kanonske enačbe

### §40 Hamiltonove enačbe

Pri zapisu zakonov mehanike z Lagrangevo funkcijo in ustreznimi Lagrangevimi enačbami predpostavimo, da lahko mehansko stanje sistema opišemo tako, da določimo posplošene koordinate in hitrosti. To pa ni edini mogoči opis. Sistem lahko namreč opišemo tudi s posplošenimi koordinatami in gibalnimi količinami sistema, takšen opis pa je še posebej primeren pri obravnavi nekaterih splošnih nalog mehanike. Zanima nas, kakšna je oblika enačb pri takšni formulaciji mehanike.

Prehod iz enega nabora neodvisnih spremenljivk v drugega lahko dosežemo z matematičnim orodjem imenovanim *Legendrova transformacija*. Opišimo transformacijo v našem primeru. Totalni odvod Lagrangeve funkcije kot funkcije koordinat in hitrosti je

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i.$$

To lahko zapišemo tudi kot

$$dL = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i, \quad (40.1)$$

ker so posplošene gibalne količine po definiciji enake  $\partial L / \partial \dot{q}_i$ , in ker iz Lagrangevih enačb sledi, da je  $\partial L / \partial q_i = \dot{p}_i$ . Drugi člen v (40.1) zapišemo kot  $\sum p_i d\dot{q}_i = d(\sum p_i \dot{q}_i) - \sum \dot{q}_i dp_i$ , diferencial  $d(\sum p_i \dot{q}_i)$  preselimo na levo stran in spremenimo predznak enačbe. Dobimo

$$d(\sum p_i \dot{q}_i - L) = - \sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i.$$

Izraz pod diferencialnim znakom je energija sistema (glej 6); energijo, izraženo s koordinatami in gibalnimi količinami, imenujemo *Hamiltonova funkcija* ali *Hamiltonka* sistema:

$$H(p, q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \quad (40.2)$$

Iz enačbe, zapisane z diferenciali,

$$dH = - \sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i, \quad (40.3)$$

kjer so neodvisne spremenljivke koordinate in gibalne količine, dobimo enačbe

$$\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i, \quad \dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i. \quad (40.4)$$

To so iskane gibalne enačbe, kjer kot spremenljivke nastopajo  $p$  in  $q$ , imenujejo pa se *Hamiltonove enačbe*. To je  $2s$  diferencialnih enačb prvega reda z  $2s$  neznanimi funkcijami  $p_i(t)$  in  $q_i(t)$ , ki nadomestijo  $s$  enačb drugega reda v Lagrangevem formalizmu. Ker so enačbe preproste in simetrične oblike, jih imenujemo tudi *kanonske enačbe*.

Totalni časovni odvod Hamiltonove funkcije je

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i.$$

Če v izraz vstavimo  $\dot{p}_i$  in  $\dot{q}_i$  iz enačb (40.4), ugotovimo, da se zadnja člena okrajšata, in je

$$dH/dt = \partial H/\partial t. \quad (40.5)$$

Kadar Hamiltonova funkcija ni eksplicitno odvisna od časa, je  $dH/dt = 0$ . To je zakon o ohranitvi energije.

Poleg dinamičnih spremenljivk  $q, \dot{q}$  ali  $q, p$  vsebujeta Lagrangeva in Hamiltonova funkcija razne parametre, ki opisujejo lastnosti mehanskega sistema samega ali pa zunanje sile, ki delujejo nanj. Naj bo  $\lambda$  eden izmed takšnih parametrov. Če ga smatramo kot spremenljivko, dobimo namesto (40.1)

$$dL = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i + (\partial L/\partial \lambda) d\lambda,$$

namesto (40.3) pa

$$dH = - \sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i - (\partial L/\partial \lambda) d\lambda.$$

Zato je

$$(\partial H/\partial \lambda)_{p,q} = -(\partial L/\partial \lambda)_{\dot{q},q}, \quad (40.6)$$

kar podaja povezavo med odvodi Lagrangeve in Hamiltonove funkcije glede na parameter  $\lambda$ . Spodnji indeksi nas opominjajo, katere količine pri odvajanju smatramo kot konstante.

To pravilo lahko zapišemo tudi drugače. Lagrangevo funkcijo zapišemo kot  $L = L_0 + L'$ , kjer je  $L'$  majhen popravek k funkciji  $L_0$ . Potem je ustrezní popravek  $H'$  k Hamiltonovi funkciji  $H = H_0 + H'$  povezan z  $L'$  po enačbi

$$(H')_{p,q} = -(L')_{\dot{q},q}. \quad (40.7)$$

Opazimo lahko, da pri prehodu iz enačbe (40.1) k enačbi (40.3) nismo upoštevali člena z diferencialom  $dt$ , ki bi upošteval možno eksplicitno časovno odvisnost Lagrangeve funkcije: čas namreč smatramo kot parameter, ki v transformaciji ne nastopa. V skladu z enačbo (40.6) sta parcialna odvoda po času funkcij  $L$  in  $H$  povezana z enačbo

$$(\partial H/\partial t)_{p,q} = -(\partial L/\partial t)_{\dot{q},q}. \quad (40.8)$$

## NALOGE

NALOGA 1. Zapiši Hamiltonove funkcije za delec v kartezičnih, valjnih in krogelnih koordinatah.

Rešitev: V kartezičnih koordinatah  $x, y, z$ ,

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z);$$

v valjnih koordinatah  $r, \phi, z$ ,

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + p_z^2 \right) + U(r, \phi, z);$$

v krogelnih koordinatah  $r, \theta, \phi$ ,

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r, \theta, \phi).$$

NALOGA 2. Zapiši Hamiltonovo funkcijo za delec v enakomerno vrtečem se opazovalnem sistemu.

Rešitev: Hitrost  $\mathbf{v}$  v izrazu za energijo (39.11) zapišemo z gibalno količino  $\mathbf{p}$  iz izraza (39.10) in dobimo  $H = p^2/2m - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{p} + U$ .

NALOGA 3. Zapiši Hamiltonovo funkcijo za sistem enega delca z maso  $M$  in  $n$  delcev z maso  $m$ . Pri tem iz naloge izloči gibanje skupnega težišča (glej nalogo v § 13).

Rešitev: Energijo  $E$  dobimo iz Lagrangeve funkcije, ki smo jo določili v nalogi v § 13, tako da spremenimo predznak potencialne energije  $U$ . Posplošene gibalne količine so

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_a &= \partial L / \partial \mathbf{v}_a \\ &= m \mathbf{v}_a - (m^2 / \mu) \sum_a \mathbf{v}_a. \end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{p}_a &= m \sum \mathbf{v}_a - (nm^2 / \mu) \sum \mathbf{v}_a \\ &= (mM / \mu) \sum \mathbf{v}_a, \\ \mathbf{v}_a &= \mathbf{p}_a / m + \frac{1}{M} \sum \mathbf{p}_a. \end{aligned}$$

To vstavimo v izraz za  $E$  in dobimo

$$H = \frac{1}{2m} \sum_a \mathbf{p}_a^2 + \frac{1}{2M} \left( \sum_a \mathbf{p}_a \right)^2 + U.$$

## §41 Routhova funkcija

Včasih želimo pri transformaciji v nove spremenljivke z gibalnimi količinami zamenjati le nekatere posplošene hitrosti. Postopek je povsem enak tistemu iz prejšnjega razdelka.

Zaradi preprostosti najprej predpostavimo, da imamo le dve koordinati, na primer  $q$  in  $\xi$ , in transformiramo spremenljivke  $q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi}$  v  $q, \xi, p, \dot{\xi}$ , kjer je  $p$  posplošena gibalna količina, ki ustreza koordinati  $q$ .

Diferencial Lagrangeve funkcije  $L(q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi})$  je

$$\begin{aligned} dL &= (\partial L / \partial q) dq + (\partial L / \partial \dot{q}) d\dot{q} + (\partial L / \partial \xi) d\xi + (\partial L / \partial \dot{\xi}) d\dot{\xi} \\ &= \dot{p} dq + p d\dot{q} + (\partial L / \partial \xi) d\xi + (\partial L / \partial \dot{\xi}) d\dot{\xi}, \end{aligned}$$

tako da dobimo

$$d(L - p\dot{q}) = \dot{p} dq - \dot{q} dp + (\partial L/\partial \xi) d\xi + (\partial L/\partial \dot{\xi}) d\dot{\xi}.$$

Routhovo funkcijo vpeljemo kot

$$R(q, p, \xi, \dot{\xi}) = p\dot{q} - L, \quad (41.1)$$

kjer hitrost  $\dot{q}$  izrazimo z gibalno količino  $p$  po enačbi  $p = \partial L/\partial \dot{q}$ . Diferencial Routhove funkcije je

$$dR = -\dot{p} dq + \dot{q} dp - (\partial L/\partial \xi) d\xi - (\partial L/\partial \dot{\xi}) d\dot{\xi}. \quad (41.2)$$

Tako dobimo

$$\dot{q} = \partial R/\partial p, \quad \dot{p} = -\partial R/\partial q, \quad (41.3)$$

$$\partial L/\partial \xi = -\partial R/\partial \xi, \quad \partial L/\partial \dot{\xi} = -\partial R/\partial \dot{\xi}. \quad (41.4)$$

Te enačbe vstavimo v Lagrangevo funkcijo za koordinato  $\xi$ , pa dobimo

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} \right) = \frac{\partial R}{\partial \xi}. \quad (41.5)$$

Sklenemo lahko, da ima Routhova funkcija lastnosti Hamiltonove funkcije glede na koordinato  $q$  (enačbe (41.3)) in lastnosti Lagrangeve funkcije glede na koordinato  $\xi$  (enačba (41.5)).

Energija sistema je po splošni definiciji enaka

$$E = \dot{q}\partial L/\partial \dot{q} + \dot{\xi}\partial L/\partial \dot{\xi} - L = p\dot{q} + \dot{\xi}\partial L/\partial \dot{\xi} - L.$$

Z Routhovo funkcijo to zapišemo kot

$$E = R - \dot{\xi}\partial R/\partial \dot{\xi}, \quad (41.6)$$

kar lahko dokažemo, če v enačbo vstavimo (41.1) in (41.4).

Posplošitev zgornjih enačb na večje število spremenljivk  $q$  in  $\xi$  je očitna.

Uporaba Routhove funkcije je primerna predvsem takrat, ko so katere izmed koordinat ciklične. Če so koordinate  $q$  ciklične, se v Lagrangevi funkcije ne pojavljajo in zato tudi v Routhovi funkciji ne. Routhova funkcija je zato funkcija spremenljivk  $p$ ,  $\xi$  in  $\dot{\xi}$ . Gibalne količine  $p$  cikličnih koordinat so konstantne, kar sledi iz druge enačbe (41.3), zato ta enačba ne pove nič novega. Ko gibalne količine  $p$  zamenjamo z njihovimi konstantnimi vrednostmi, v enačbah (41.5)  $(d/dt)\partial R(p, \xi, \dot{\xi})/\partial \dot{\xi} = \partial R(p, \xi, \dot{\xi})/\partial \xi$  nastopa le še koordinata  $\xi$ , tako da smo ciklično koordinato povsem izločili. Če te enačbe rešimo, dobimo funkcije  $\xi(t)$  in jih vstavimo v desne strani enačb  $\dot{q} = \partial R(p, \xi, \dot{\xi})/\partial p$ , lahko funkcije  $q(t)$  izračunamo z neposredno integracijo.

## NALOGA

NALOGA Zapiši Routhovo funkcijo za simetrično vrtavko z zunanjem polju  $U(\phi, \theta)$ , tako da iz naloge izločiš ciklično koordinato  $\psi$  ( $\psi$ ,  $\phi$  in  $\theta$  so Eulerjevi koti).

Rešitev: Lagrangeva funkcija je  $L = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi}^2 + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - U(\phi, \theta)$ ; glej prvo nalogo v § 35. Routhova funkcija je

$$R = p_\psi \dot{\psi} - L = \frac{p_\psi^2}{2I_3} - p_\psi \dot{\phi} \cos \theta - \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + U(\phi, \theta);$$

prvi člen je konstanten in ga zato lahko izpustimo.

## §42 Poissonovi oklepaji

Naj bo  $f(p, q, t)$  neka funkcija koordinat, gibalnih količin in časa. Njen totalni odvod po času je

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right).$$

V enačbo vstavimo vrednosti  $\dot{q}_k$  in  $\dot{p}_k$  iz Hamiltonovih enačb (40.4) in dobimo izraz

$$df/dt = \partial f/\partial t + [H, f], \quad (42.1)$$

kjer je

$$[H, f] \equiv \sum_k \left( \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} \right). \quad (42.2)$$

Ta izraz imenujemo *Poissonov oklepaj* količin  $H$  in  $f$ .

Funkcije dinamičnih spremenljivk, ki se ohranjajo med gibanjem sistema, se imenujejo *integrali gibanja*. Iz enačbe (42.1) je razvidno, da lahko pogoj, da je količina  $f$  integral gibanja ( $df/dt = 0$ ), zapišemo kot

$$\partial f/\partial t + [H, f] = 0. \quad (42.3)$$

Če integral gibanja ni eksplicitno odvisen od časa, tedaj se pogoj glasi

$$[H, f] = 0, \quad (42.4)$$

torej Poissonov oklepaj integrala gibanja in Hamiltonove funkcije mora biti enak nič.

Poissonov oklepaj za poljubni količini  $f$  in  $g$  lahko vpeljemo po analogiji z enačbo (42.2):

$$[f, g] \equiv \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right). \quad (42.5)$$

Poissonov oklepaj ima naslednje lastnosti, ki jih lahko preprosto izpeljemo iz definicije.

Če zamenjamo vrsti red funkcij, Poissonov oklepaj zamenja predznak; če je ena izmed funkcij konstanta  $c$ , je Poissonov oklepaj enak nič:

$$[f, g] = -[g, f], \quad (42.6)$$

$$[f, c] = 0. \quad (42.7)$$

Velja tudi

$$[f_1 + f_2, g] = [f_1, g] + [f_2, g], \quad (42.8)$$

$$[f_1 f_2, g] = f_1 [f_2, g] + f_2 [f_1, g]. \quad (42.9)$$

Če odvajamo (42.5) po času, dobimo

$$\frac{\partial}{\partial t} [f, g] = \left[ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right]. \quad (42.10)$$



Če je ena izmed funkcij  $f$  ali  $g$  gibalna količina ali koordinata, je Poissonov oklepaj kar enak parcialnemu odvodu:

$$[f, q_k] = \partial f / \partial p_k, \quad (42.11)$$

$$[f, p_k] = -\partial f / \partial q_k. \quad (42.12)$$

Enačbo (42.11) dobimo, če postavimo  $g = q_k$  v (42.5); od vsote preostale en sam člen, saj je  $\partial q_k / \partial q_l = \delta_{kl}$  in  $\partial q_k / \partial p_l = 0$ . V posebnem primeru, ko v enačbi (42.11) in (42.12) vstavimo  $f = q_i$  oziroma  $f = p_i$ , dobimo

$$[q_i, q_k] = 0, \quad [p_i, p_k] = 0, \quad [p_i, q_k] = \delta_{ik}. \quad (42.13)$$

Relacija

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0, \quad (42.14)$$

imenovana *Jacobijeva identiteta*, velja za Poissonove oklepaje poljubnih treh funkcij  $f$ ,  $g$  in  $h$ . Na poti do dokaza si najprej oglejmo naslednjo lemo. Po definiciji (42.5) je Poissonov oklepaj  $[f, g]$  bilinearna homogena funkcija prvih odvodov funkcij  $f$  in  $g$ . Zato je oklepaj  $[h, [f, g]]$  linearna homogena funkcija drugih odvodov funkcij  $f$  in  $g$ . Leva stran enačbe (42.14) je torej linearna homogena funkcija drugih odvodov vseh treh funkcij  $f$ ,  $g$  in  $h$ . Zberimo skupaj člene, ki vsebujejo druge odvode funkcije  $f$ . Prvi oklepaj takšnih členov ne vsebuje, ker v njem nastopa le prvi odvod funkcije  $f$ . Vsoto drugega in tretjega oklepaja lahko simbolično zapišemo z linearnimi diferencialnimi operatorji  $D_1$  in  $D_2$ , ki jih definiramo z  $D_1(\phi) = [g, \phi]$  in  $D_2(\phi) = [h, \phi]$ . Tedaj je

$$\begin{aligned} [g, [h, f]] + [h, [f, g]] &= [g, [h, f]] - [h, [g, f]] \\ &= D_1[D_2(f)] - D_2[D_1(f)] \\ &= (D_1D_2 - D_2D_1)f. \end{aligned}$$

Hitro se lahko prepričamo, da takšna kombinacija linearnih diferencialnih operatorjev ne more vsebovati drugega odvoda funkcije  $f$ . Splošna oblika linearnih diferencialnih operatorjev je

$$D_1 = \sum_k \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad D_2 = \sum_k \eta_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

kjer sta  $\xi_k$  in  $\eta_k$  poljubni funkciji spremenljivk  $x_1, x_2, \dots$ . Potem je

$$\begin{aligned} D_1D_2 &= \sum_{k,l} \xi_k \eta_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k,l} \xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l}, \\ D_2D_1 &= \sum_{k,l} \eta_k \xi_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k,l} \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l}, \end{aligned}$$

razlika obeh izrazov pa je

$$D_1D_2 - D_2D_1 = \sum_{k,l} \left( \xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} - \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_l}.$$

To je operator, ki vsebuje le prve odvode. Zato se členi, ki vsebujejo druge odvode funkcije  $f$  na levi strani enačbe (42.14) okrajšajo, in ker isto velja tudi za  $g$  in  $h$ , mora biti celotni izraz enak nič.

Pomembna lastnost Poissonovih oklepajev je, da je Poissonov oklepaj dveh integralov gibanja tudi integral gibanja:

$$[f, g] = \text{konst.} \quad (42.15)$$

To je *Poissonov izrek*. Dokaz je preprost, kadar  $f$  in  $g$  nista eksplicitno odvisna od časa. Če vstavimo  $h = H$  v Jacobijevo identiteto, dobimo

$$[H, [f, g]] + [f, [g, H]] + [g, [H, f]] = 0.$$

Ker je  $[H, g] = 0$  in  $[H, f] = 0$ , je  $[H, [f, g]] = 0$ , kar je iskani rezultat.

Če sta integrala gibanja  $f$  in  $g$  eksplicitno odvisna od časa, iz enačbe (42.1) sledi

$$\frac{d}{dt}[f, g] = \frac{\partial}{\partial t}[f, g] + [H, [f, g]].$$

Uporabimo enačbo (42.10), Poissonov oklepaj  $[H, [f, g]]$  pa izrazimo z drugima dvema s pomočjo Jacobijeve identitete. Tako dobimo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[f, g] &= \left[ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right] - [f, [g, H]] - [g, [H, f]] \\ &= \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f], g \right] + \left[ f, \frac{\partial g}{\partial t} + [H, g] \right] \\ &= \left[ \frac{df}{dt}, g \right] + \left[ f, \frac{dg}{dt} \right]. \end{aligned} \quad (42.16)$$

S tem je dokaz Poissonovega izreka zaključen.

Seveda se s Poissonovim izrekom ne moremo vedno dokopati do dodatnih integralov gibanja, ker jih je skupaj le  $2s - 1$  (kjer je  $s$  število prostostnih stopenj sistema). V nekaterih primerih je rezultat trivialen. Poissonov oklepaj je lahko kar konstanta ali pa neka funkcija integralov  $f$  in  $g$ . V teh primerih dobljena količina ni nov integral gibanja.

## NALOGE

**NALOGA 1.** Izračunaj Poissonov oklepaj kartezičnih komponent gibalne količine  $\mathbf{p}$  in vrtilne količine  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  delca.

*Rešitev:* Z enačbo (42.12) dobimo  $[M_x, p_y] = -\partial M_x / \partial y = -\partial(y p_z - z p_y) / \partial y = -p_z$ , podobno pa dobimo še  $[M_x, p_x] = 0$  in  $[M_x, p_z] = p_y$ . Ostale oklepaje dobimo s ciklično permutacijo indeksov  $x, y, z$ .

**NALOGA 2.** Izračunaj Poissonove oklepaje med komponentami vrtilne količine  $\mathbf{M}$ .

*Rešitev:* Z neposrednim izračunom z enačbo (42.5) dobimo  $[M_x, M_y] = -M_z$ ,  $[M_y, M_z] = -M_x$ ,  $[M_z, M_x] = -M_y$ .

Ker so gibalne količine in koordinate različnih delcev med seboj neodvisne spremenljivke, se hitro prepričamo, da izrazi izpeljani v prvi in drugi nalogi veljajo tudi za skupno gibalno količino in skupno vrtilno količino poljubnega sistema delcev.

**NALOGA 3.** Pokaži, da velja  $[\phi, M_z] = 0$ , kjer je  $\phi$  poljubna funkcija koordinat in gibalne količine, ki je središčno simetrična glede na izhodišče.

*Rešitev:* Takšna funkcija  $\phi$  je lahko odvisna od komponent vektorjev  $\mathbf{r}$  in  $\mathbf{p}$  le preko kombinacij  $\mathbf{r}^2$ ,  $\mathbf{p}^2$  in  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$ . Zato je

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \phi}{\partial (\mathbf{r}^2)} \cdot 2\mathbf{r} + \frac{\partial \phi}{\partial (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} \cdot \mathbf{p},$$

in podobno za  $\partial \phi / \partial \mathbf{p}$ . Poissonov oklepaj lahko izračunamo neposredno z uporabo enačbe (42.5), pri čemer uporabimo dobljeni enačbi za parcialne odvode.

NALOGA 4. Dokaži, da velja  $[\mathbf{f}, M_z] = \mathbf{f} \times \mathbf{n}$ , če je  $\mathbf{f}$  vektorska funkcija koordinat in gibalne količine delca,  $\mathbf{n}$  pa je enotski vektor vzporeden z osjo  $z$ .

*Rešitev:* Poljubni vektor  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  lahko zapišemo kot  $\mathbf{f} = \mathbf{r}\phi_1 + \mathbf{p}\phi_2 + \mathbf{r} \times \mathbf{p}\phi_3$ , kjer so  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  in  $\phi_3$  skalarne funkcije. Iskano zvezo lahko preverimo z neposrednim izračunom z uporabo enačb (42.8), (42.11), (42.12) in pravila iz prejšnje naloge.

## §43 Akcija kot funkcija koordinat

Med obravnavo načela najmanjše akcije smo si ogledali integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (43.1)$$

kjer integriramo po poti med dvema podanima položajema  $q^{(1)}$  in  $q^{(2)}$ , v katerih je sistem ob trenutkih  $t_1$  in  $t_2$ . Ko smo akcijo variirali, smo primerjali vrednosti integrala za bližnje poti, ki pa so imele isti robni vrednosti  $q(t_1)$  in  $q(t_2)$ . Ena sama pot ustreza dejanskemu gibanju sistema: tista, za katero ima integral  $S$  najmanjšo vrednost.

Oglejmo si koncept akcije še z drugega vidika. Količino  $S$  smatramo kot količino, ki opisuje gibanje po dejanski poti, in primerjamo vrednosti  $S$  za poti, ki imajo skupni začetek pri  $q(t_1) = q^{(1)}$ , in ki gredno skozi različne točke ob času  $t_2$ . Z drugimi besedami, zanima nas integral akcije na dejanski poti sistema kot funkcija koordinat pri zgornji integracijski meji.

Akciji dveh bližnjih poti (če imamo eno samo prostostno stopnjo) se razlikujeta za (glej (2.5)):

$$\delta S = \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt.$$

Ker poti pri dejanskem gibanju zadoščajo Lagrangevim enačbam, je integral v izrazu za  $\delta S$  enak nič. V prvem členu postavimo  $\delta q(t_1) = 0$ , vrednost  $\delta q(t_2)$  pa označimo kar z  $\delta q$ . Odvod  $\partial L / \partial \dot{q}$  zamenjamo s  $p$  in končno dobimo  $\delta S = p \delta q$ , v splošnem primeru s poljubnim številom prostostnih stopenj pa

$$\delta S = \sum_i p_i \delta q_i. \quad (43.2)$$

Iz tega izraza je razvidno, da so parcialni odvodi akcije po koordinatah enaki ustreznim gibalnim količinam:

$$\partial S / \partial q_i = p_i. \quad (43.3)$$

Akcijo lahko obravnavamo tudi kot eksplicitno funkcijo časa. Pri tem se poti začnejo ob določenem času  $t_1$  in v določeni točki  $q^{(1)}$ , končajo pa se v točki  $q^{(2)}$  ob času, ki je prosti parameter,  $t_2 = t$ . Parcialne odvode  $\partial S / \partial t$  bi lahko dobili z ustrezno variacijo integrala. Lahko pa si pomagamo z enačbo (43.3) in do rezultata pridemo po lažji poti.

Iz definicije akcije sledi, da je totalni odvod po času, izračunan na dejanski poti sistema, enak

$$dS/dt = L. \quad (43.4)$$

Sedaj pa obravnavamo  $S$  kot funkcijo koordinat in časa (v smislu zgornjih vpeljav) in z uporabo enačbe (43.3) dobimo

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i.$$

S primerjavo dobimo  $\partial S/\partial t = L - \sum p_i \dot{q}_i$  ali

$$\partial S/\partial t = -H. \quad (43.5)$$

Enačbi (43.3) in (43.5) lahko zapišemo tudi z izrazom

$$dS = \sum_i p_i dq_i - H dt \quad (43.6)$$

za totalni diferencial akcije kot funkcije koordinat in časa zgornje integracijske meje v (43.1). Sedaj pa kot proste spremenljivke vzemimo koordinate in čas tako na začetku, kot na koncu gibanja. Očitno je, da bomo ustrezen diferencial akcije dobili kot razliko izrazov (43.6) na koncu in na začetku poti:

$$dS = \sum p_i^{(2)} dq_i^{(2)} - H^{(2)} dt^{(2)} - \sum p_i^{(1)} dq_i^{(1)} + H^{(1)} dt^{(1)}. \quad (43.7)$$

Iz tega izraza sledi, da ne glede na zunanje sile, ki delujejo na sistem med gibanjem, končno stanje ne more biti poljubna funkcija začetnega stanja; mogoča so samo tista gibanja, pri katerih je izraz na desni strani enačbe (43.7) popolni diferencial. Sam obstoj načela najmanjše akcije, neodvisno od konkretne oblike Lagrangeve funkcije, omejuje množico možnih gibanj. Možno je izpeljati več splošnih lastnosti, ki niso odvisne od zunanjih polj, za snope delcev, ki izhajajo iz različnih točk v prostoru. Preučevanje teh lastnosti spada na področje *geometrijske optike*. \*

Naj opozorimo, da lahko Hamiltonove enačbe formalno izpeljemo z minimiziranjem akcije oblike

$$S = \int (\sum_i p_i dq_i - H dt), \quad (43.8)$$

kar sledi iz (43.6), če neodvisno variiramo koordinate in gibalne količine. Zaradi preprostosti ponovno predpostavimo, da imamo le eno koordinato in eno gibalno količino. Variacija akcije je

$$\delta S = \int [\delta p dq + p d\delta q - (\partial H/\partial q)\delta q dt - (\partial H/\partial p)\delta p dt].$$

Po integraciji per partes v drugem členu dobimo

$$\delta S = \int \delta p \{ dq - (\partial H/\partial p) dt \} + [p\delta q] - \int \delta q \{ dp + (\partial H/\partial q) dt \}.$$

Na robovih integracijskega območja je  $\delta q = 0$  in izintegrirani člen odpade. Preostali izraz je enak nič le tedaj, kadar sta oba integranda neodvisno enaka nič, ker sta variaciji  $\delta p$  in  $\delta q$  neodvisni in poljubni. Sledi  $dq = (\partial H/\partial p) dt$  in  $dp = -(\partial H/\partial q) dt$ , po deljenju z  $dt$  pa dobimo Hamiltonove enačbe.

\* Glej *Teorija polja*, sedmo poglavje.

## §44 Maupertuisovo načelo

Načelo najmanjše akcije povsem določa gibanje sistema: z rešitvijo gibalnih enačb, ki jih izpeljemo s pomočjo načela, dobimo tako obliko poti kot položaj telesa na poti kot funkcijo časa.

Če nas zanima le pot, ne pa tudi časovna odvisnost, lahko uporabimo poenostavljeno obliko načela najmanjše akcije. Predpostavimo, da Lagrangeva in posledično Hamiltonova funkcija nista eksplicitno odvisni od časa, tako da je energija konstantna  $H(p, q) = E = \text{konst.}$  Po načelu najmanjše akcije je variacija akcije pri danih začetnih in končnih koordinatah in trenutkih (označimo ju  $t_0$  in  $t$ ) enaka nič. Če dopustimo variacijo trenutka  $t$  pri nespremenljivih začetnih in končnih koordinatah, velja (glej (43.7))

$$\delta S = -H\delta t. \quad (44.1)$$

V nadaljevanju ne upoštevajmo vseh možnih virtualnih gibanj sistema, temveč le tista, pri katerih se ohranja energija. Pri takšnih gibanjih lahko  $H$  v (44.1) zamenjamo s konstanto  $E$ , kar da

$$\delta S + E\delta t = 0. \quad (44.2)$$

Akcijo zapišemo v obliki (43.8) in ponovno zamenjamo  $H$  z  $E$  in dobimo

$$S = \int \sum_i p_i dq_i - E(t - t_0). \quad (44.3)$$

Prvi člen v tem izrazu,

$$S_0 = \int \sum_i p_i dq_i, \quad (44.4)$$

včasih imenujemo *okrajšana akcija*.

Izraz (44.3) vstavimo v enačbo (44.2) in sledi

$$\delta S_0 = 0. \quad (44.5)$$

Okrajšana akcija ima minimum med potmi, na katerih se energija ohranja in ki gredo skozi končno točko ob poljubnem trenutku. Pri uporabi tega variacijskega principa moramo gibalne količine (in zato tudi celotni integrand v (44.4)) izraziti s koordinatami  $q$  in njihovimi diferenciali  $dq$ . V ta namen uporabimo definicijo gibalne količine:

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L \left( q, \frac{dq}{dt} \right) \quad (44.6)$$

in zakon o ohranitvi energije:

$$E \left( q, \frac{dq}{dt} \right) = E. \quad (44.7)$$

Diferencial  $dt$  izrazimo s koordinatami  $q$  in njihovimi diferenciali  $dq$  s pomočjo (44.7), nato pa ga vstavimo v (44.6). Tako dobimo gibalne količine kot funkcijo  $q$  in  $dq$ , energija  $E$  pa nastopa kot parameter. Dobljeni variacijski princip določa pot sistema in se pogosto imenuje *Maupertuisovo načelo*, čeprav sta ga natančno formulirala Euler in Lagrange.

Zgornji račun lahko eksplicitno izvedemo, kadar je Lagrangeva funkcija običajne oblike (5.5), namreč razlika kinetične in potencialne energije:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q).$$

Gibalne količine so

$$p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i = \sum_k a_{ik}(q) \dot{q}_k,$$

energija pa

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k + U(q).$$

Iz zadnje enačbe dobimo

$$dt = \sqrt{\sum a_{ik} dq_i dq_k / 2(E - U)}; \quad (44.8)$$

to vstavimo v

$$\sum_i p_i dq_i = \sum_{i,k} a_{ik} \frac{dq_k}{dt} dq_i,$$

in dobimo okrajšano akcijo

$$S_0 = \int \sqrt{2(E - U) \sum_{i,k} a_{ik} dq_i dq_k}. \quad (44.9)$$

V primeru enega samega delca je kinetična energija  $T = \frac{1}{2}m(dl/dt)^2$ , kjer je  $m$  masa delca in  $dl$  diferencial dolžine poti; variacijski princip, ki določa pot, je

$$\delta \int \sqrt{2m(E - U)} dl = 0, \quad (44.10)$$

kjer integriramo po poti med dvema točkama v prostoru. To obliko je izpeljal Jacobi.

Pri prostem gibanju delca je  $U = 0$ , in iz (44.10) dobimo trivialen rezultat  $\delta \int dl = 0$ , da se delec giblje po najkrajši poti med dvema točkama, torej po premici.

Vrnimo se k izrazu za akcijo (44.3) in ga variirajmo po parametru  $E$ . Imamo

$$\delta S = \frac{\partial S_0}{\partial E} \delta E - (t - t_0) \delta E - E \delta t;$$

to vstavimo v (44.2) in dobimo

$$\partial S_0 / \partial E = t - t_0. \quad (44.11)$$

Ko ima okrajšana akcija obliko (44.9), sledi

$$\int \sqrt{\sum a_{ik} dq_i dq_k / 2(E - U)} = t - t_0, \quad (44.12)$$

kar ni nič drugega kot integral enačbe (44.8). Skupaj z enačbo za pot zgornji izraz povsem določi gibanje.

## NALOGA

NALOGA Izpeljite diferencialno enačbo tira s pomočjo variacijskega načela (44.10).

Rešitev: Z variiranjem dobimo

$$\delta \int \sqrt{E-U} dl = - \int \left[ \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\delta \mathbf{r}}{2\sqrt{E-U}} dl - \sqrt{E-U} \frac{d\mathbf{r}}{dl} \cdot d\delta \mathbf{r} \right].$$

V drugem členu smo upoštevali, da je  $dl^2 = d\mathbf{r}^2$ , od koder sledi  $dl d\delta l = d\mathbf{r} d\delta \mathbf{r}$ . Ta člen integriramo po delih, izenačimo z nič koeficient pred  $\delta \mathbf{r}$  v integrandu in dobimo diferencialno enačbo tira:

$$2\sqrt{E-U} \frac{d}{dl} \left[ \sqrt{E-U} \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right] = -\partial U / \partial \mathbf{r}.$$

Na levi strani razpišemo odvod, na desno pa vstavimo silo  $\mathbf{F} = -\partial U / \partial \mathbf{r}$ . Dobimo

$$d^2 \mathbf{r} / dl^2 = [\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t}] / 2(E-U),$$

kjer je  $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/dl$  enotski vektor, ki je tangenta na tir. Razlika  $\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t}$  je komponenta  $\mathbf{F}_n$  sile, ki je normalna na tir. Odvod  $d^2 \mathbf{r} / dl^2 = d\mathbf{t} / dl$  je poznan iz diferencialne geometrije in znaša  $\mathbf{n}/R$ , kjer je  $R$  krivinski polmer tira,  $\mathbf{n}$  pa enotski vektor v smeri glavne normale. Razliko  $E-U$  nadomestimo z  $\frac{1}{2}mv^2$ , in dobimo  $(mv^2/R)\mathbf{n} = \mathbf{F}_n$ , kar ni nič drugega kot izraz za radialni pospešek pri gibanju po ukrivljenem tiru.

## §45 Kanonske transformacije

Izbira posplošenih koordinat  $q$  ni omejena; to je poljubnih  $s$  količin, s katerimi enolično določimo položaj sistema v prostoru. Lagrangeve enačbe (2.6) so formalno enake oblike, ne glede na izbiro koordinat, in v tem smislu lahko rečemo, da so invariantne na transformacijo iz koordinat  $q_1, q_2, \dots$  v koordinate  $Q_1, Q_2, \dots$ . Nove koordinate  $Q$  so funkcije koordinat  $q$  in dopustili bomo možnost, da so eksplicitno odvisne od časa. Transformacijo lahko tedaj zapišemo kot

$$Q_i = Q_i(q, t), \quad (45.1)$$

kar včasih imenujemo *točkovna transformacija*.

Ker se Lagrangeve enačbe pri transformaciji (45.1) ne spremenijo, ostanejo nespremenjene tudi Hamiltonove enačbe (40.4). Hamiltonove enačbe pravzaprav dopuščajo večji razpon transformacij. To je seveda posledica tega, da so v Hamiltonovem formalizmu gibalne količine  $p$  povsem enakovredni koordinatam  $q$  in so od njih neodvisni. Zato lahko pri transformaciji hkrati pretvorimo vseh  $2s$  neodvisnih količin  $p$  in  $q$ :

$$Q_i = Q_i(p, q, t), \quad P_i = P_i(p, q, t). \quad (45.2)$$

Ta razširitev razreda možnih transformacij je ena izmed pomembnih prednosti Hamiltonovega formalizma.

Po drugi strani pa enačbe gibanja ne obdržijo kanonske oblike pri vseh transformacijah oblike (45.2). Izpeljimo pogoj, pod katerim bodo enačbe gibanja, zapisane z novimi koordinatami  $P, Q$ , imele obliko

$$\dot{Q}_i = \partial H' / \partial P_i, \quad \dot{P}_i = -\partial H' / \partial Q_i, \quad (45.3)$$

kjer je  $H'(P, Q)$  nova Hamiltonova funkcija. Med temi transformacijami najdemo zelo pomembno podmnožico *kanonskih transformacij*.

Poiščimo enačbe kanonskih transformacij. Na koncu 43 smo pokazali, da lahko Hamiltonove enačbe izpeljemo iz načela najmanjše akcije oblike

$$\delta \int \left( \sum_i p_i dq_i - H dt \right) = 0, \quad (45.4)$$

pri čemer neodvisno variiramo vse koordinate in gibalne količine. Če nove spremenljivke  $P$  in  $Q$  zadostijo Hamiltonovim enačbam, potem mora veljati tudi načelo najmanjše akcije

$$\delta \int \left( \sum_i P_i dQ_i - H' dt \right) = 0. \quad (45.5)$$

Enačbi (45.4) in (45.5) sta očitno ekvivalentni, če sta integranda enaka, razlikujeta pa se lahko za totalni časovni odvod neke funkcije  $F$ , odvisne od koordinat, gibalnih količin in časa. Razlika med integraloma je tedaj konstanta, enaka razliki vrednosti  $F$  na robovih integracijskega območja, ki pa pri variaciji odpade. Zato bomo vzeli

$$\sum p_i dq_i - H dt = \sum P_i dQ_i - H' dt + dF.$$

Transformacije, ki zadostijo temu pogoju, se imenujejo kanonske transformacije. \* Vsako kanonsko transformacijo opisuje določena funkcija  $F$ , ki se imenuje *tvorilka* transformacije.

Če relacijo zapišemo kot

$$dF = \sum p_i dq_i - \sum P_i dQ_i + (H' - H) dt, \quad (45.6)$$

razberemo, da je

$$p_i = \partial F / \partial q_i, \quad P_i = -\partial F / \partial Q_i, \quad H' = H + \partial F / \partial t; \quad (45.7)$$

kjer smo privzeli, da je tvorilka podana kot funkcija starih in novih koordinat ter časa:  $F = F(q, Q, t)$ . Če je  $F$  poznan, potem enačbe (45.7) podajajo povezavo med  $p, q$  in  $P, Q$  ter novo Hamiltonovo funkcijo.

Priročno je zapisati tvorilko kot funkcijo starih koordinat  $q$  in novih gibalnih količin  $P$  namesto kot funkcijo  $q$  in  $Q$ . Enačbo za kanonsko transformacijo bomo v tem primeru dobili z ustrezno Legendrovo transformacijo enačbe (45.6):

$$d(F + \sum P_i Q_i) = \sum p_i dq_i + \sum Q_i dP_i + (H' - H) dt.$$

Diferencirana količina na levi strani enačbe, izražena kot funkcija spremenljivk  $q$  in  $P$ , je nova tvorilka  $\Phi(q, P, t)$ . Potem je <sup>†</sup>

$$p_i = \partial \Phi / \partial q_i, \quad Q_i = \partial \Phi / \partial P_i, \quad H' = H + \partial \Phi / \partial t. \quad (45.8)$$

\* Kanonska oblika enačb gibanja se ohranja ne le ob kanonskih transformacijah, temveč tudi ob transformacijah, pri katerih se integranda v (45.4) in (45.6) razlikujeta za konstantni faktor. Primer takšne transformacije je  $P_i = ap_i$ ,  $Q_i = q_i$ ,  $H' = aH$ , s poljubno konstanto  $a$ .

<sup>†</sup> Če je tvorilka  $\Phi = \sum f_i(q, t)P_i$ , kjer so  $f_i$  poljubne funkcije, dobimo transformacijo, pri katere so nove koordinate  $Q_i = f_i(q, t)$ , kar pomeni, da jih lahko zapišemo izključno s starimi koordinatami (brez gibalnih količin). To je točkovna transformacija in torej posebna oblika kanonske transformacije.



Podobno lahko izpeljemo enačbe za kanonske transformacije, pri katerih so tvorilke odvisne od  $p$  in  $Q$ , ali pa od  $p$  in  $P$ .

Povezava med staro in novo Hamiltonovo funkcijo je vedno enake oblike: razlika  $H - H'$  je parcialni odvod tvorilke po času. Kadar je tvorilka neodvisna od časa, velja  $H = H'$ , kar pomeni, da novo Hamiltonovo funkcijo dobimo preprosto tako, da v  $H$  nadomestimo spremenljivke  $p$  in  $q$  z njihovimi zapisi z  $P$  in  $Q$ .

Zaradi velikega števila možnih kanonskih transformacij izgubijo posplošene koordinate in gibalne količine v Hamiltonovem formalizmu velik del njihovega prvotnega pomena. Ker transformacije (45.2) med seboj povežejo količine  $P$  in  $Q$  tako s koordinatami  $q$ , kot z gibalnimi količinami  $p$ , spremenljivke  $Q$  niso več čiste prostorske koordinate, zato je razlikovanje med  $Q$  in  $P$  le še vprašanje nomenklature. To je lepo razvidno na primer iz transformacije  $^* Q_i = p_i$ ,  $P_i = -q_i$ , ki očitno ne spremeni kanonske oblike enačb, temveč le preimenuje koordinate v gibalne količine in obratno.

Zaradi poljubnosti nomenklature v Hamiltonovem formalizmu spremenljivke  $p$  in  $q$  pogosto imenujemo kar *kanonsko konjugirane* količine. Pogoji, da sta dve količini konjugirani, lahko zapišemo s Poissonovimi oklepaji. V ta namen bomo najprej dokazali splošen izrek o invariantnosti Poissonovih oklepajev na kanonske transformacije.

Naj bo  $[f, g]_{p,q}$  Poissonov oklepaj dveh količin  $f$  in  $g$ , kjer odvajamo po spremenljivkah  $p$  in  $q$ ,  $[f, g]_{P,Q}$  pa Poissonov oklepaj, kjer odvajamo po spremenljivkah  $P$  in  $Q$ . Velja

$$[f, g]_{p,q} = [f, g]_{P,Q}. \quad (45.9)$$

Enakost lahko dokažemo z neposrednim izračunom in uporabo enačb za kanonsko transformacijo. Lahko pa uporabimo tudi naslednji dokaz.

Najprej opazimo, da se čas pojavlja v kanonskih transformacijah (45.7) in (45.8) kot parameter. Zato zadostuje, da dokažemo (45.9) za količine, ki niso eksplicitno odvisne od časa. Formalno lahko smatramo  $g$  kot Hamiltonovo funkcijo nekega izmišljenega sistema. Iz enačbe (42.1) sledi  $[f, g]_{p,q} = -df/dt$ . Odvod  $df/dt$  je lahko odvisen le od lastnosti gibanja izmišljenega sistema, ne pa od konkretne izbire spremenljivk. Zato se Poissonov oklepaj  $[f, g]$  ne spremeni ob prehodu iz enega v drug nabor kanonskih spremenljivk. Iz enačb (42.13) in (45.9) dobimo

$$[Q_i, Q_k]_{p,q} = 0, \quad [P_i, P_k]_{p,q} = 0, \quad [P_i, Q_k]_{p,q} = \delta_{ik}. \quad (45.10)$$

To so pogoji, zapisani s Poissonovimi oklepaji, ki jim morajo zadostiti nove spremenljivke, če naj bo transformacija  $p, q \rightarrow P, Q$  kanonska.

Vredno je omeniti, da lahko spreminjanje količin  $p, q$  med gibanjem sistema smatramo kot zaporedje kanonskih transformacij. Naj bodo  $q_t, p_t$  vrednosti kanonskih spremenljivk ob času  $t$ ,  $q_{t+\tau}, p_{t+\tau}$  pa njihove vrednosti ob času  $t + \tau$ . Zadnje so funkcije slednjih in vsebujejo  $\tau$  kot parameter:

$$q_{t+\tau} = q(q_t, p_t, t, \tau), \quad p_{t+\tau} = p(q_t, p_t, t, \tau).$$

Če ti enačbi obravnavamo kot transformacijo iz spremenljivk  $q_t, p_t$  v  $q_{t+\tau}, p_{t+\tau}$ , tedaj je ta transformacija kanonska. To je lepo razvidno iz izraza  $dS = \sum (p_{t+\tau} dq_{t+\tau} - p_t dq_t) - (H_{t+\tau} - H_t) dt$  za diferencial akcije  $S(q_{t+\tau}, q_t, t, \tau)$ , izračunane na dejanski poti sistema, ki gre skozi točki  $q_t$  in  $q_{t+\tau}$  ob času  $t$  in  $t + \tau$  (glej (43.7)). Primerjava te enačbe z (45.6) pokaže, da je  $-S$  tvorilka kanonske transformacije.

---

\*Katere tvorilka je  $F = \sum q_i Q_i$ .

## §46 Liouvillov izrek

Pojem *faznega prostora* je zelo uporaben pri geometrijskem tolmačenju mehanskih pojavov. To je  $2s$  dimenzionalni prostor, katerega koordinatne osi ustrezajo  $s$  posplošenim koordinatam in  $s$  gibalnim količinam obravnavanega sistema. Vsaka točka faznega prostora predstavlja določeno stanje sistema. Med gibanjem sistema opiše točka, ki predstavlja stanje sistema, pot, imenovano *fazna pot*.

Produkt diferencialov  $d\Gamma = dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s$  lahko smatramo kot diferencialno prostornino faznega prostora. Oglejmo si integral  $\int d\Gamma$  po nekem območju faznega prostora: integral predstavlja prostornino tega območja. Pokazali bi radi, da je integral invarianten na kanonske transformacije, kar pomeni, da sta pri kanonski transformaciji iz spremenljivk  $p, q$  v  $P, Q$  prostornini ustreznih območij prostorov  $p, q$  in  $P, Q$  enaki:

$$\int \dots \int dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s = \int \dots \int dQ_1 \dots dQ_s dP_1 \dots dP_s. \quad (46.1)$$

Zamenjavo spremenljivk v večkratnem integralu dosežemo z enačbo  $\int \dots \int dQ_1 \dots dQ_s dP_1 \dots dP_s = \int \dots \int D dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s$ , kjer je  $D$  Jacobijeva determinanta transformacije:

$$D = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)}. \quad (46.2)$$

Dokaz enačbe (46.1) smo tako privedli na dokaz, da je Jacobijeva determinanta kanonske transformacije enaka ena:

$$D = 1. \quad (46.3)$$

Uporabili bomo dobro poznano lastnosti Jacobijevih determinant, da lahko z njimi računamo podobno kot z ulomki. Števec in imenovalc "delimo" z  $\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)$  in dobimo

$$D = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)} / \frac{\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)}.$$

Druga poznana lastnost Jacobijevih determinant je ta, da jih lahko poenostavimo na Jacobijeve determinante manjšega števila spremenljivk, kadar nastopajo iste količine tako v števcu kot v imenovalcu. Pri tem moramo ponovljene količine smatrati kot konstante pri parcialnem odvajanju. Z enačbo lahko to zapišemo kot

$$D = \left\{ \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s)} \right\}_{P=\text{konst.}} / \left\{ \frac{\partial(p_1, \dots, p_s)}{\partial(P_1, \dots, P_s)} \right\}_{q=\text{konst.}}. \quad (46.4)$$

Jacobijeva determinanta v števcu je po definiciji determinanta reda  $s$ , katere element v  $i$ -ti vrstici in  $k$ -tem stolpcu je  $\partial Q_i / \partial q_k$ . Naj bo  $\Phi(q, P)$  tvorilka obravnavane kanonske transformacije (glej (45.8)). Potem je  $\partial Q_i / \partial q_k = \partial^2 \Phi / \partial q_k \partial P_i$ . Podobno ugotovimo, da je element v  $i$ -ti vrstici in  $k$ -tem stolpcu determinante v imenovalcu enačbe (46.4) enak  $\partial^2 \Phi / \partial q_i \partial P_k$ . Determinanti se razlikujeta le v tem, da sta zamenjani vlogi vrstic in stolpcev, zato sta enaki. Kvocient (46.4) je enak ena. Konec dokaza.

Predpostavimo, da se vsaka izmed točk v obravnavanem območju faznega prostora giblje v skladu z enačbami gibanja mehanskega sistema. Pri tem se območje gibanja kot celota, in sicer na tak način, da se ohranja prostornina območja:

$$\int d\Gamma = \text{konst.} \quad (46.5)$$

Ta rezultat, imenovan *Liouvilleov izrek*, sledi iz invariantnosti prostornine faznega prostora na kanonske transformacije in iz dejstva, da lahko spreminjanje  $p$  in  $q$  med gibanjem sistema smatramo kot kanonsko transformacijo (glej konec razdelka 45).

Povsem analogno lahko dokažemo tudi invariantnost integralov

$$\iint \sum_i dq_i dp_i, \quad \iiint \sum_{i \neq k} dq_i dp_i dq_k dp_k, \dots,$$

kjer integriramo po dvo-, štiri-, itd. dimenzionalni mnogoterosti v faznem prostoru.

## §47 Hamilton-Jacobijeve enačbe

V 43 smo akcijo obravnavali kot funkcijo koordinat in časa. Pokazali smo, da je parcialni odvod po času akcije  $S(q, t)$  povezan s Hamiltonov funkcijo,

$$\partial S / \partial t + H(q, p, t) = 0,$$

in da so parcialni odvodi akcije po koordinatah enaki gibalnim količinam. Če v Hamiltonovi funkciji nadomestimo gibalne količine  $p$  z odvodi  $\partial S / \partial q$ , dobimo enačbo

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1, \dots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; t) = 0, \quad (47.1)$$

v kateri je neznana funkcija  $S(q, t)$ . To parcialno diferencialno enačbo prvega reda imenujemo *Hamilton-Jacobijeva enačba*.

Podobno kot Lagrangeve in kanonske enačbe je Hamilton-Jacobijeva enačba osnova splošne metode za reševanje gibalnih enačb.

Pred opisom metode naj spomnimo, da ima vsaka parcialna diferencialna enačba prvega reda rešitev, kjer nastopa poljubna funkcija; takšna rešitev se imenuje *splošni integral* enačbe. V nalogah s področja mehanike je splošni integral Hamilton-Jacobijeve enačbe manj pomemben kot *popolni integral*, ki vsebuje toliko neodvisnih poljubnih konstant, kot je neodvisnih spremenljivk.

Neodvisne spremenljivke Hamilton-Jacobijeve enačbe so koordinate in čas. Popolni integral te enačbe mora zato za mehanski sistem z  $s$  prostostnimi stopnjami vsebovati  $s + 1$  poljubnih konstant. Ker funkcija  $S$  nastopa v enačbi samo v odvodih, je ena izmed konstant aditivna, tako da je popolni integral Hamilton-Jacobijeve enačbe enak

$$S = f(t, q_1, \dots, q_s; \alpha_1, \dots, \alpha_s) + A, \quad (47.2)$$

kjer so  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  in  $A$  poljubne konstante. \*

\* Čeprav splošnega integrala Hamilton-Jacobijeve enačbe tu ne potrebujemo, lahko vseeno pokažemo, kako ga dobimo iz popolnega integrala. Količino  $A$  smatramo kot poljubno funkcijo preostalih konstant:  $S = f(t, q_1, \dots, q_s; \alpha_1, \dots, \alpha_s) + A(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ . Količine  $\alpha_i$  nadomestimo s funkcijami koordinat in časa, podanimi z  $s$  pogoji  $\partial S / \partial \alpha_i = 0$  in dobimo splošni integral, izražen s poljubno funkcijo  $A(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ . Za tako definirano funkcijo  $S$  namreč velja

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \left( \frac{\partial S}{\partial q_i} \right)_\alpha + \sum_k \left( \frac{\partial S}{\partial \alpha_k} \right)_q \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i} = \left( \frac{\partial S}{\partial q_i} \right)_\alpha.$$

Količine  $(\partial S / \partial q_i)_\alpha$  zadostijo Hamilton-Jacobijevi enačbi, ker smo predpostavili, da je funkcija  $S(t, q; \alpha)$  popolni integral te enačbe. Količine  $\partial S / \partial q_i$  zato zadostijo isti enačbi.

Poiščimo sedaj povezavo med popolnim integralom Hamilton-Jacobijeve enačbe in rešitvijo gibalnih enačb, kar nas zanima. V ta namen opravimo kanonsko transformacijo iz spremenljivk  $q, p$  v nove spremenljivke, pri čemer uporabimo funkcijo  $f(t, q; \alpha)$  kot tvorilko, količine  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  pa kot nove gibalne količine. Nove koordinate imenujmo  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ . Ker je tvorilka odvisna od starih koordinat in novih gibalnih količin, uporabimo enačbo (45.8):  $p_i = \partial f / \partial q_i, \beta_i = \partial f / \partial \alpha_i, H' = H + \partial f / \partial t$ . Ker je  $f$  rešitev Hamilton-Jacobijeve enačbe, je nova Hamiltonova funkcija enaka nič:  $H' = H + \partial f / \partial t = H + \partial S / \partial t = 0$ . Zato so kanonske enačbe v novih spremenljivkah  $\dot{\alpha}_i = 0, \dot{\beta}_i = 0$ , od tod pa sledi

$$\alpha_i = \text{konstanta}, \quad \beta_i = \text{konstanta}. \quad (47.3)$$

S pomočjo  $s$  enačb  $\partial f / \partial \alpha_i = \beta_i$  lahko  $s$  koordinat  $q$  izrazimo kot funkcije hitrosti in  $2s$  konstant  $\alpha$  in  $\beta$ . Tako dobimo splošno rešitev gibalnih enačb.

Rešitev naloge o gibanju mehanskega sistema s Hamilton-Jacobijevo metodo poteka na sledeči način. S Hamiltonovo funkcijo zapišemo Hamilton-Jacobijevo enačbo in poiščemo njen popolni integral (47.2). Integral odvajamo po poljubnih konstantah  $\alpha$  in odvode izenačimo z novimi konstantami  $\beta$ . Tako dobimo  $s$  algebraskih enačb

$$\partial S / \partial \alpha_i = \beta_i, \quad (47.4)$$

katerih rešitev nam da koordinate  $q$  kot funkcije časa in  $2s$  poljubnih konstant. Gibalne količine kot funkcije časa dobimo iz enačb  $p_i = \partial S / \partial q_i$ .

Če poznamo nepopoln integral Hamilton-Jacobijeve enačbe, v katerem nastopa manj kot  $s$  poljubnih konstant, z njim ne moremo priti do splošne rešitve gibalnih enačb, lahko pa si z njim pomagamo pri iskanju splošnega integrala. Če na primer poznamo funkcijo  $S$  z eno poljubno konstanto  $\alpha$ , nam da enačba  $\partial S / \partial \alpha = \text{konstanta}$  eno povezavo med  $q_1, \dots, q_s$  in  $t$ .

Hamilton-Jacobijeva enačba se nekoliko poenostavi, če funkcija  $H$  ni eksplicitno odvisna od časa, torej če je sistem konservativen. Časovno odvisnost akcije nam tedaj da člen  $-Et$ :

$$S = S_0(q) - Et \quad (47.5)$$

(glej 44) in ko ta izraz vstavimo v (47.1) dobimo Hamilton-Jacobijevo enačbo za okrajšano akcijo:

$$H \left( q_1, \dots, q_s; \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s} \right) = E. \quad (47.6)$$

## §48 Separacija spremenljivk

V številnih pomembnih primerih lahko popolni integral Hamilton-Jacobijeve enačbe dobimo s "separacijo spremenljivk", kar je ime metode, ki jo bomo sedaj opisali.

Predpostavimo, da neka koordinata  $q_1$  in ustrezni odvod  $\partial S / \partial q_1$  nastopata v Hamilton-Jacobijeve enačb samo v neki kombinaciji  $\phi(q_1, \partial S / \partial q_1)$ , kjer ne nastopajo druge koordinate, čas ali odvodi. Enačba je torej oblike

$$\Phi \left\{ q_i, t, \frac{\partial S}{\partial q_i}, \frac{\partial S}{\partial t}, \phi \left( q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1} \right) \right\} = 0, \quad (48.1)$$

kjer  $q_i$  označuje vse koordinate, razen  $q_1$ .

Iščemo rešitev, ki se zapiše kot vsota:

$$S = S'(q_i, t) + S_1(q_1); \quad (48.2)$$

to vstavimo v enačbo (48.1) in dobimo

$$\Phi \left\{ q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \phi \left( q_1, \frac{dS_1}{dq_1} \right) \right\} = 0. \quad (48.3)$$

Predpostavimo, da že poznamo rešitev enačbe (48.2). Če rešitev vstavimo v enačbo (48.3), postane slednja enačba identiteta, ki velja za poljubno vrednost spremenljivke  $q_1$ . Ko se  $q_1$  spremeni, se sme spremeniti le funkcija  $\phi$ , in ker je (48.3) identiteta, od tod sledi, da je  $\phi$  konstantna funkcija. Zato iz enačbe (48.3) dobimo dve ločeni enačbi:

$$\phi(q_1, dS_1/dq_1) = \alpha_1, \quad (48.4)$$

$$\Phi\{q_i, t, \partial S'/\partial q_i, \partial S'/\partial t, \alpha_1\} = 0, \quad (48.5)$$

kjer je  $\alpha_1$  poljubna konstanta. Prva enačba je navadna diferencialna enačba, tako da funkcijo  $S_1(q_1)$  dobimo s preprosto integracijo. Preostala parcialna diferencialna enačba (48.5) vsebuje manj neodvisnih spremenljivk.

Če nam uspe ločiti vseh  $s$  koordinat in čas, se iskanje popolnega integrala Hamilton-Jacobijeve enačbe poenostavi na integracijsko nalogo. Pri konservativnem sistemu moramo ločiti le  $s$  spremenljivk (koordinate) v enačbi (47.6), dobljen integral pa je

$$S = \sum_k S_k(q_k; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) - E(\alpha_1, \dots, \alpha_s)t, \quad (48.6)$$

kjer je vsaka izmed funkcij  $S_k$  odvisna od ene same koordinate; energijo  $E$  kot funkcijo poljubnih konstant  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  dobimo iz enačbe (47.6) z nastavkom  $S_0 = \sum S_k$ .

Poseben primer je separacija ciklične koordinate. Ciklična koordinata  $q_1$  v Hamiltonovi funkciji ne nastopa eksplicitno, zato je ni niti v Hamilton-Jacobijeve enačbi. Funkcija  $\phi(q_1, \partial S/\partial q_1)$  se poenostavi na  $\partial S/\partial q_1$  in iz enačbe (48.4) sledi preprost rezultat  $S_1 = \alpha_1 q_1$ , tako da je

$$S = S'(q_i, t) + \alpha_1 q_1. \quad (48.7)$$

Konstanta  $\alpha_1$  je kar konstantna vrednost gibalne količine  $p_1 = \partial S/\partial q_1$ , ki ustreza ciklični koordinati.

Čas v členu  $-Et$  pri konservativnih sistemih si lahko predstavljamo kot separacijo "časovne spremenljivke"  $t$ .

Tako so vsi predhodno obravnavani primeri poenostavitve integracije gibalnih gibanja z uporabo cikličnih spremenljivk le poseben primer metode separacije spremenljivk v Hamilton-Jacobijevi enačbi. Metoda pa omogoča tudi separacijo spremenljivk, ki niso ciklične. Hamilton-Jacobijeva metoda je zato najmočnejša metoda za iskanje splošnega integrala gibalnih enačb.

Spremenljivke v Hamilton-Jacobijevi enačbi lahko ločimo (separiramo), če so koordinate primerno izbrane. Ogledali si bomo nekaj primerov separacije spremenljivk v različnih koordinatnih sistemih, ki so relevantni pri obravnavi nalog o gibanju delcev v različnih zunanjih poljih.

(1) *Sferične koordinate*. V teh koordinatah  $(r, \theta, \phi)$  se Hamiltonova funkcija zapiše

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r, \theta, \phi),$$

spremenljivke pa lahko ločimo, če je

$$U = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} + \frac{c(\phi)}{r^2 \sin^2 \theta},$$

kjer so  $a(r), b(\theta), c(\phi)$  poljubne funkcije. Zadnji člen v izrazu za  $U$  se v fizikalnih nalogah ne pojavlja, zato si bomo ogledali

$$U = a(r) + b(\theta)/r^2. \quad (48.8)$$

V tem primeru je Hamilton-Jacobijeva enačba za funkcijo  $S_0$

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_0}{\partial r} \right)^2 + a(r) + \frac{1}{2mr^2} \left[ \left( \frac{\partial S_0}{\partial \theta} \right)^2 + 2mb(\theta) \right] + \frac{1}{2mr^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial S_0}{\partial \phi} \right)^2 = E.$$

Ker je koordinata  $\phi$  ciklična, iščemo rešitev oblike  $S_0 = p_\phi \phi + S_1(r) + S_2(\theta)$ . Za funkciji  $S_1(r)$  in  $S_2(\theta)$  dobimo enačbi

$$\begin{aligned} \left( \frac{dS_2}{d\theta} \right)^2 + 2mb(\theta) + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} &= \beta, \\ \frac{1}{2m} \left( \frac{dS_1}{dr} \right)^2 + a(r) + \frac{\beta}{2mr^2} &= E. \end{aligned}$$

Po integraciji končno dobimo

$$S = -Et + p_\phi \phi + \int \sqrt{\beta - 2mb(\theta) - p_\phi^2 / \sin^2 \theta} d\theta + \int \sqrt{2m[E - a(r)] - \beta/r^2} dr. \quad (48.9)$$

Poljubne konstante v (48.9) so  $p_\phi, \beta$  in  $E$ . Funkcijo  $S$  odvajamo po teh spremenljivkah, odvode izenačimo z novimi konstantami in tako dobimo splošno rešitev gibalnih enačb.

(2) *Parabolične koordinate*. Iz cilindričnih koordinat  $\rho, \phi, z$  preidemo v parabolične koordinate  $\xi, \eta, \phi$  po predpisu

$$z = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad \rho = \sqrt{\xi\eta}. \quad (48.10)$$

Koordinate  $\xi$  in  $\eta$  imajo vrednosti med 0 in  $\infty$ ; ploskve konstantnih  $\xi$  in  $\eta$  sta dve družini rotacijskih paraboloidov, katerih simetrijska os je  $z$ . Enačbe (48.10) lahko zapišemo tudi s spremenljivko

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2} = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad (48.11)$$

(torej s polmerom v sferičnih koordinatah) v obliki

$$\xi = r + z, \quad \eta = r - z. \quad (48.12)$$

Izpeljimo Lagrangevo funkcijo za delec opisan s koordinatami  $\xi, \eta, \phi$ . Izraz (48.10) odvajamo po času in ga vstavimo v Lagrangevo funkcijo za cilindrične koordinate

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - U(\rho, \phi, z).$$

Dobimo

$$L = \frac{1}{8}m(\xi + \eta) \left( \frac{\dot{\xi}^2}{\xi} + \frac{\dot{\eta}^2}{\eta} \right) + \frac{1}{2}m\xi\eta\dot{\phi}^2 - U(\xi, \eta, \phi). \quad (48.13)$$

Gibalne količine so  $p_\xi = \frac{1}{4}m(\xi + \eta)\dot{\xi}/\xi$ ,  $p_\eta = \frac{1}{4}m(\xi + \eta)\dot{\eta}/\eta$  in  $p_\phi = m\xi\eta\dot{\phi}$ . Hamiltonova funkcija je

$$H = \frac{2}{m} \frac{\xi p_\xi^2 + \eta p_\eta^2}{\xi + \eta} + \frac{p_\phi^2}{2m\xi\eta} + U(\xi, \eta, \phi). \quad (48.14)$$

Fizikalno zanimivi primeri separacije spremenljivk v teh koordinatah imajo potencialno energijo oblike

$$U = \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi + \eta} = \frac{a(r+z) + b(r-z)}{2r}. \quad (48.15)$$

Enačba za  $S_0$  je

$$\frac{2}{m(\xi + \eta)} \left[ \xi \left( \frac{\partial S_0}{\partial \xi} \right)^2 + \eta \left( \frac{\partial S_0}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{1}{2m\xi\eta} \left( \frac{\partial S_0}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi + \eta} = E.$$

Ciklično koordinato  $\phi$  separiramo in dobimo člen  $p_\phi\dot{\phi}$ . Enačbo pomnožimo z  $m(\xi + \eta)$  in jo preuredimo. Dobimo

$$2\xi \left( \frac{\partial S_0}{\partial \xi} \right)^2 + ma(\xi) - mE\xi + \frac{p_\phi^2}{2\xi} + 2\eta \left( \frac{\partial S_0}{\partial \eta} \right)^2 + mb(\eta) - mE\eta + \frac{p_\phi^2}{2\eta} = 0.$$

Uporabimo nastavek  $S_0 = p_\phi\phi + S_1(\xi) + S_2(\eta)$  in dobimo dve enačbi

$$\begin{aligned} 2\xi \left( \frac{dS_1}{d\xi} \right)^2 + ma(\xi) - mE\xi + \frac{p_\phi^2}{2\xi} &= \beta, \\ 2\eta \left( \frac{dS_2}{d\eta} \right)^2 + mb(\eta) - mE\eta + \frac{p_\phi^2}{2\eta} &= -\beta, \end{aligned}$$

po integraciji pa dobimo

$$S = -Et + p_\phi\phi + \int \sqrt{\frac{1}{2}mE + \frac{\beta}{2\xi} - \frac{ma(\xi)}{2\xi} - \frac{p_\phi^2}{4\xi^2}} d\xi + \int \sqrt{\frac{1}{2}mE - \frac{\beta}{2\eta} - \frac{mb(\eta)}{2\eta} - \frac{p_\phi^2}{4\eta^2}} d\eta. \quad (48.16)$$

Poljubne konstante so tu  $p_\phi$ ,  $\beta$  in  $E$ .

(3) *Eliptične koordinate*. To so koordinate  $\xi, \eta, \phi$ , definirane z

$$\rho = \sigma\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}, \quad z = \sigma\xi\eta \quad (48.17)$$

Konstanta  $\rho$  je parameter transformacije. Vrednosti koordinate  $\xi$  tečejo od 1 do  $\infty$ , koordinate  $\eta$  pa od -1 do +1. Lahko pa zapišemo tudi definicijo, ki si jo geometrijsko lažje predstavljamo.  $A_1$  in  $A_2$  sta točki na  $z$  osi pri  $z = \pm\sigma$ , razdalji od poljubne točke do  $A_1$  in  $A_2$  pa sta  $r_1 = \sqrt{(z - \sigma)^2 + \rho^2}$  in  $r_2 = \sqrt{(z + \sigma)^2 + \rho^2}$ . \* Vstavimo  $\rho$  in  $z$  iz enačbe (48.17) in sledi

$$\begin{aligned} r_1 &= \sigma(\xi - \eta), \quad r_2 = \sigma(\xi + \eta), \\ \xi &= (r_2 + r_1)/2\sigma, \quad \eta = (r_2 - r_1)/2\sigma. \end{aligned} \quad (48.18)$$

\*Ploskve konstantnih  $\xi$  so elipsoidi  $x^2/\sigma^2\xi^2 + \rho^2/\sigma^2(\xi^2 - 1) = 1$  z žariščema v točkah  $A_1$  in  $A_2$ ; ploskve konstantnih  $\eta$  so hiperboloidi  $z^2/\sigma^2\eta^2 - \rho^2/\sigma^2(1 - \eta^2) = 1$  z žariščema prav tako v točkah  $A_1$  in  $A_2$ .

Lagrangevo funkcijo transformiramo iz cilindričnih v eliptične koordinate in dobimo

$$L = \frac{1}{2}m\sigma^2(\xi^2 - \eta^2) \left( \frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2 - 1} + \frac{\dot{\eta}^2}{1 - \eta^2} \right) + \frac{1}{2}m\sigma^2(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)\dot{\phi}^2 - U(\xi, \eta, \phi). \quad (48.19)$$

Hamiltonova funkcija je

$$H = \frac{1}{2m\sigma^2(\xi^2 - \eta^2)} \left[ (\xi^2 - 1)p_\xi^2 + (1 - \eta^2)p_\eta^2 + \left( \frac{1}{\xi^2 - 1} + \frac{1}{1 - \eta^2} \right) p_\phi^2 \right] + U(\xi, \eta, \phi). \quad (48.20)$$

Fizikalno relevanten primer separacije spremenljivk ima potencialno energijo

$$U = \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi^2 - \eta^2} = \frac{\sigma^2}{r_1 r_2} \left\{ a \left( \frac{r_2 + r_1}{2\sigma} \right) + b \left( \frac{r_2 - r_1}{2\sigma} \right) \right\}, \quad (48.21)$$

kjer sta  $a(\xi)$  in  $b(\eta)$  poljubni funkciji. Rezultat separacije spremenljivk v Hamilton-Jacobijevi enačbi je

$$S = -Et + p_\phi \phi + \int \sqrt{2m\sigma^2 E + \frac{\beta - 2m\sigma^2 a(\xi)}{\xi^2 - 1} - \frac{p_\phi^2}{(\xi^2 - 1)^2}} d\xi + \int \sqrt{2m\sigma^2 E - \frac{\beta + 2m\sigma^2 b(\eta)}{1 - \eta^2} - \frac{p_\phi^2}{(1 - \eta^2)^2}} d\eta. \quad (48.22)$$

## NALOGE

**NALOGA 1.** Poišči popolni integral Hamilton-Jacobijeve enačbe za gibanje delca v polju  $U = \alpha/r - Fz$  (to polje je sestavljeno iz Coulombovega polja in homogenega električnega polja) in določi funkcijo koordinat in gibalnih količin, ki se pri tem gibanju ohranja.

*Rešitev:* To polje je oblike (48.15), kjer je  $a(\xi) = \alpha - \frac{1}{2}F\xi^2$ ,  $b(\eta) = \alpha + \frac{1}{2}F\eta^2$ . Popolni integral Hamilton-Jacobijeve enačbe je podan z (48.16), v katerega vstavimo zapisani funkciji  $a(\xi)$  in  $b(\eta)$ . Pomen konstante  $\beta$  ugotovimo tako, da zapišemo enačbi

$$2\xi p_\xi^2 + ma(\xi) - mE\xi + \frac{1}{2}p_\phi^2/\xi = \beta, \\ 2\eta p_\eta^2 + mb(\eta) - mE\eta + \frac{1}{2}p_\phi^2/\eta = -\beta.$$

Enačbi med seboj odštejemo, gibalni količini  $p_\xi = \partial S/\partial\xi$ ,  $p_\eta = \partial S/\partial\eta$  izrazimo z gibalnima količinama  $p_\rho = \partial S/\partial\rho$  in  $p_z = \partial S/\partial z$  valjnega koordinatnega sistema in s preprostim izračunom končno dobimo

$$\beta = -m \left[ \frac{\alpha z}{r} + \frac{p_\rho}{m} (z p_\rho - \rho p_z) + \frac{p_\phi^2}{m\rho^2} z \right] - \frac{1}{2}mF\rho^2.$$

Izraz med oglatima oklepajema je integral gibanja, ki je značilen za gibanje v navadnem Coulombovem polju (to je komponenta v smeri  $z$  vektorja (15.17)).

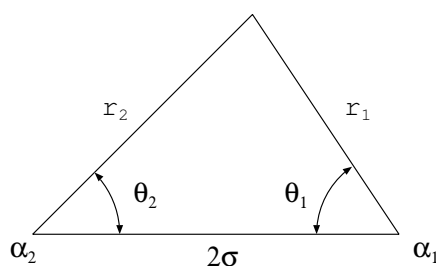
**NALOGA 2.** Kot v prvi nalogi, vendar za polje  $U = \alpha_1/r_1 + \alpha_2/r_2$  (torej Coulombovo polje dveh nepremičnih nabojev, ki sta med seboj oddaljena za  $2\sigma$ ).



*Rešitev:* To polje je vrste (48.21) z  $a(\xi) = (\alpha_1 + \alpha_2)\xi/\sigma$ ,  $b(\eta) = (\alpha_1 - \alpha_2)\eta/\sigma$ . Akcijo  $S(\xi, \eta, \phi, t)$  dobimo tako, da ta izraza vstavimo v (48.22). Pomen konstante  $\beta$  dobimo na podoben način kot v prejšnji nalogi; tukaj izraža ohranjanje količine

$$\begin{aligned}\beta &= \sigma^2 \left( p^2 + \frac{p_\phi^2}{\rho^2} \right) - M^2 + 2m\sigma(\alpha_1 \cos \theta_1 + \alpha_2 \cos \theta_2), \\ M^2 &= (\mathbf{r} \times \mathbf{p})^2 \\ &= p^2 z^2 + p_z^2 \rho^2 + \frac{r^2 p_\phi^2}{\rho^2} - 2z\rho p_z p_\rho,\end{aligned}$$

kjer sta  $\theta_1$  in  $\theta_2$  kota, prikazana na sliki 54.



Slika 54:

## §49 Adiatbatne invariante

Obravnavajmo mehanski sistem z omejenim gibanjem v eni dimenziji, opisan s parametrom  $\lambda$ , ki določa lastnosti sistema ali zunanjega polja, v katerem je sistem. \* Naj se  $\lambda$  spreminja počasi (*adiabatno*) s časom zaradi nekega zunanjega učinka; “počasna” sprememba je takšna, pri kateri se  $\lambda$  spremeni le malo v nihajnem času  $T$ :

$$T d\lambda/dt \ll \lambda. \quad (49.1)$$

Če bi bila  $\lambda$  konstantna, bi bil sistem izoliran in bi se gibal povsem periodično s konstantno energijo  $E$  in z določenim nihajnim časom  $T(E)$ . Če se parameter  $\lambda$  spreminja, sistem ni izoliran in energija se ne ohranja. Če pa predpostavimo, da se  $\lambda$  spreminja le počasi, bo tudi spreminjanje energije počasno in  $\dot{E}$  bo majhna količina. Če  $\dot{E}$  povprečimo po nihajnem času  $T$ , se bodo “hitra” nihanja zgladila in dobljena povprečena vrednost bo določala enakomerno spreminjanje energije sistema, ki bo sorazmerno s spreminjanjem parametra  $\lambda$ . Drugače povedano, počasi spreminjajoča se količina  $E$  (vzeta po izračunu povprečja) bo funkcija spremenljivke  $\lambda$ . Odvisnost med  $E$  in  $\lambda$  lahko izrazimo kot konstantnost neke kombinacije količin  $E$  in  $\lambda$ . Takšna količina, ki se ohranja med gibanjem sistema s počasi spreminjajočimi se parametri, se imenuje *adiabatna invarianta*.

Naj bo  $H(q, p; \lambda)$  Hamiltonova funkcija sistema, ki je odvisna od parametra  $\lambda$ . Iz enačbe (40.5) sledi, da se energija sistema spreminja kot

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \quad (49.2)$$

\*Da bodo enačbe bolj enostavne, tu predpostavljamo, da imamo en sam tak parameter. Vse ugotovitve pa seveda veljajo za poljubno število parametrov.

Izraz na desni je odvisen ne le od počasi spreminjajoče se  $\lambda$ , temveč tudi od hitro nihajočih  $q$  in  $p$ . Enakomerno spreminjanje energije bomo dobili po zgoraj opisanem postopku: izračunati moramo povprečje enačbe (49.2) po nihajnem času. Ker se  $\lambda$  in  $\dot{\lambda}$  spreminjata počasi, količine  $\dot{\lambda}$  ne rabimo povprečiti:

$$\frac{\overline{dE}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\overline{\partial H}}{\partial \lambda}. \quad (49.3)$$

Ko računamo povprečno vrednost funkcije  $\partial H/\partial \lambda$ , kot spremenljivki obravnavamo le  $p$  in  $q$ , ne pa tudi  $\lambda$ . Z drugimi besedami, povprečje izračunamo tako, kot da bi se sistem gibal pri konstantnem  $\lambda$ .

Račun povprečja lahko zapišemo eksplicitno:

$$\frac{\overline{\partial H}}{\partial \lambda} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial H}{\partial \lambda} dt.$$

Iz Hamiltonove enačbe  $\dot{q} = \partial H/\partial p$  sledi  $dt = dq/(\partial H/\partial p)$ . Integracijo po času lahko zato nadomestimo z integracijo po koordinati, nihajni čas  $T$  pa zapišemo kot

$$T = \int_0^T dt = \oint dq/(\partial H/\partial p); \quad (49.4)$$

kjer znak  $\oint$  pomeni integracijo po celotnem intervalu spreminjanja koordinate med gibanjem ("tja in nazaj"). \* Enačbo (49.3) zapišemo v obliki

$$\frac{\overline{dE}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\oint (\partial H/\partial \lambda) dq/(\partial H/\partial p)}{\oint dq/(\partial H/\partial p)}. \quad (49.5)$$

Kot rečeno, moramo v tej enačbi integrirati po tiru pri konstantni vrednosti  $\lambda$ . Na takšnem tiru ima Hamiltonova funkcija konstantno vrednost  $E$  in gibalna količina je določena funkcija spremenljive koordinate  $q$  in dveh neodvisnih konstantnih parametrov  $E$  in  $\lambda$ . Zapišemo  $p = p(q; E, \lambda)$  in po spremenljivki  $\lambda$  odvajamo enačbo  $H(q, p, \lambda) = E$ . Tako dobimo  $\partial H/\partial \lambda + (\partial H/\partial p)(\partial p/\partial \lambda) = 0$ , ali

$$\frac{\partial H/\partial \lambda}{\partial H/\partial p} = -\frac{\partial p}{\partial \lambda}.$$

To vstavimo v števec na desni strani enačbe (49.5), integrand v imenovalcu pa zapišemo kot  $\partial p/\partial E$ . Sledi

$$\frac{\overline{dE}}{dt} = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{\oint (\partial p/\partial \lambda) dq}{\oint (\partial p/\partial E) dq}$$

ali

$$\oint \left( \frac{\partial p}{\partial E} \frac{\overline{dE}}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right) dq = 0.$$

To lahko zapišemo tudi kot

$$\overline{dI/dt} = 0, \quad (49.6)$$

kjer je

$$I \equiv \oint p dq/2\pi. \quad (49.7)$$

---

\* Če je gibanje sistema vrtenje, koordinata  $q$  pa kot zasuka  $\phi$ , moramo integracijo po  $\phi$  izračunati za "celoten zasuk", torej od 0 do  $\phi$ .

Integral moramo izračunati po poti pri konstantnih  $E$  in  $\lambda$ . Vidimo, da je v uporabljenem približku količina  $I$  konstanta, ko se parameter  $\lambda$  spreminja.  $I$  je torej adiabatska invariantska.

Količina  $I$  je funkcija energije sistema (in parametra  $\lambda$ ). Parcialni odvod po energiji določa nihajni čas: iz (49.4) sledi

$$2\pi \frac{\partial I}{\partial E} = \oint \frac{\partial p}{\partial E} dq = T \quad (49.8)$$

ali

$$\partial E / \partial I = \omega, \quad (49.9)$$

kjer je  $\omega$  frekvenca, s katero sistem niha.

Integral (49.7) ima geometrijski pomen, povezan s fazno potjo sistema. V obravnavanem primeru z eno prostostno stopnjo je fazni prostor dvodimenzionalen (ravnina) s koordinatama  $p$  in  $q$ , fazna pot sistema, ki se giblje periodično, pa je sklenjena krivulja v ravnini. Integral (49.7) po tej krivulji je kar ploščina zajetega območja. Zapišemo ga lahko tudi kot ploščinski integral

$$I = \iint dp dq / 2\pi. \quad (49.10)$$

Oglejmo si na primer adiabatsko invarianto enodimenzionalnega oscilatorja. Hamiltonova funkcija se glasi

$$H = \frac{1}{2}p^2/m + \frac{1}{2}m\omega^2q^2, \quad (49.11)$$

kjer je  $\omega$  lastna frekvenca oscilatorja. Enačbo fazne poti podaja zakon o ohranitvi energije  $H(p, q) = E$ . Pot je elipsa s polosmi  $\sqrt{2mE}$  in  $\sqrt{2E/m\omega^2}$ , ploščina, deljena z  $2\pi$  pa je

$$I = E/\omega. \quad (49.12)$$

Adiabatsko invariantnost količine  $I$  pomeni, da je energija sorazmerna s frekvenco nihanja, kadar parametre oscilatorja spreminjamo počasi.

## §50 Kanonske spremenljivke

Naj bo parameter  $\lambda$  konstanten, tako da je obravnavani sistem izoliran. Opravimo kanonsko transformacijo iz spremenljivk  $p$  in  $q$  na tak način, da bo  $I$  nova "gibalna količina". Tvorilka je okrajšana akcija  $S_0$ , izražena kot funkcija  $q$  in  $I$ .  $S_0$  je namreč definiran z integralom

$$S_0(q, E; \lambda) = \int p(q, E; \lambda) dq, \quad (50.1)$$

izračunanim pri konstantni energiji  $E$  in parametru  $\lambda$ . V izoliranem sistemu je  $I$  odvisna le od energije, tako da lahko  $S_0$  zapišemo tudi kot  $S_0(q, I; \lambda)$ . Parcialni odvod  $(\partial S_0 / \partial q)_E$  je enak odvodu  $(\partial S_0 / \partial q)_I$  pri konstantnem  $I$ . Zato je

$$p = \partial S_0(q, I; \lambda) / \partial q, \quad (50.2)$$

kar ustreza prvi izmed enačb (45.8) za kanonsko transformacijo. Druga enačba pa določa novo "koordinato", ki jo označimo z  $w$ :

$$w = \partial S_0(q, I; \lambda) / \partial I. \quad (50.3)$$

Spremenljivke  $I$  in  $w$  se imenujejo *kanonske spremenljivke*;  $I$  je *kanonska akcija*,  $w$  pa *kanonski kot*.

Ker tvorilka  $S_0(q, I; \lambda)$  ni eksplicitno odvisna od časa, je nova Hamiltonova funkcija  $H'$  kar  $H$ , izražena z novimi spremenljivkami. Z drugimi besedami,  $H'$  je energija  $E(I)$ , izražena z akcijo. Hamiltonovi enačbi v kanonskih spremenljivkah sta

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{w} = dE(I)/dI. \quad (50.4)$$

Prva enačba pove, da je  $I$  konstanten, kot tudi mora biti; energija se ne spreminja, zato se tudi  $I$  ne sme. Iz druge enačbe pa sledi, da je  $w$  linearna funkcija časa:

$$w = \frac{dE}{dI} t + \text{konstanta} = \omega(I)t + \text{konstanta}; \quad (50.5)$$

kanonski kot je kar faza nihanja.

Akcija  $S_0(q, I)$  ni enolična funkcija koordinat. Po vsaki periodi se poveča za

$$\Delta S_0 = 2\pi I, \quad (50.6)$$

kar je razvidno iz (50.1) in definicije količine  $I$  (49.7). Istočasno se kot poveča za

$$\Delta w = \Delta(\partial S_0/\partial I) = \partial(\Delta S_0)/\partial I = 2\pi. \quad (50.7)$$

Podobno lahko ugotovimo, da če izrazimo  $q$  in  $p$  ali poljubno enolično funkcijo  $F(q, p)$  s kanonskimi spremenljivkami, potem se te funkcije ne spremenijo, če  $w$  povečamo za  $2\pi$  (pri konstantnem  $I$ ). To pomeni, da je poljubna funkcija  $F(q, p)$ , izražena s kanonskimi spremenljivkami, periodična funkcija spremenljivke  $w$  s periodo  $2\pi$ .

Enačbe gibanja s kanonskimi spremenljivkami lahko zapišemo tudi za odprt sistem, pri katerem se  $\lambda$  spreminja s časom. Transformacijo ponovno dosežemo z enačbama (50.2) in (50.3), z tvorilko  $S_0$ , podano z integralom (50.1) in izraženo s spremenljivko  $I$ , definirano z integralom (49.7). Nedoločeni integral (50.1) in določeni integral (49.7) izračunamo ob privzetku, da je  $\lambda(t)$  konstantna količina; drugače povedano,  $S_0(q, I; \lambda(t))$  je enaka prejšnji funkciji  $S_0$ , le da konstantno  $\lambda$  zamenjamo z izbrano funkcijo  $\lambda(t)$ . \*

Ker je tvorilka sedaj eksplicitna funkcija časa, se nova Hamiltonova funkcija  $H'$  razlikuje od stare, ki je bila enaka energiji  $E(I)$ . Po splošnih enačbah za kanonske transformacije (45.8) dobimo

$$\begin{aligned} H' &= E(I; \lambda) + \partial S_0/\partial t \\ &= E(I; \lambda) + \Lambda \dot{\lambda}, \end{aligned} \quad (50.8)$$

kjer z  $\Lambda$  označujemo

$$\Lambda = (\partial S_0/\partial \lambda)_{q, I}; \quad (50.9)$$

po odvajanju po  $\lambda$  moramo  $\Lambda$  izraziti s spremenljivkama  $I$  in  $w$  iz enačbe (50.3).

Dobljeni Hamiltonovi enačbi sta

$$\dot{I} = -\frac{\partial H'}{\partial w} = -\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial w}\right)_{I, \lambda} \dot{\lambda}, \quad (50.10)$$

$$\dot{w} = \frac{\partial H'}{\partial I} = \omega(I; \lambda) + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial I}\right)_{w, \lambda} \dot{\lambda}, \quad (50.11)$$

---

\*Poudariti pa moramo, da za časovno odvisno Hamiltonovo funkcijo tako definirana funkcija  $S_0$  ni prava okrajšana akcija.

kjer je  $\omega = (\partial E / \partial I)_\lambda$  frekvenca nihanja, izračunana ob predpostavki, da je  $\lambda$  konstantna.

### NALOGA

NALOGA Zapiši enačbe gibanja s kanonskima spremenljivkama za harmonsko nihalo (ki ga opisuje Hamiltonova funkcija (49.11)) s časovno spremenljivo frekvenco.

*Rešitev:* Ker so vse operacije v enačbah (50.1)-(50.3) izračunane ob konstantnem  $\lambda$  (v tem primeru je  $\lambda$  kar frekvenca  $\omega$  sama), je zveza med  $q$ ,  $p$  in  $w$  enake oblike, kot v primeru konstantne frekvence z  $w = \omega t$ :

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin w = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \sin w, \\ p &= \sqrt{2I\omega m} \cos w. \end{aligned}$$

Zato je

$$S_0 = \int p \, dq = \int p(\partial q / \partial w)_{I,\omega} \, dw = 2I \int \cos^2 w \, dw$$

in

$$\Lambda = \left( \frac{\partial S_0}{\partial \omega} \right)_{q,I} = \left( \frac{\partial S_0}{\partial \omega} \right)_I \left( \frac{\partial w}{\partial \omega} \right)_q = \frac{I}{2\omega} \sin 2w.$$

Enačbi (50.10) in (50.11) se torej v tem primeru glasita

$$\dot{I} = -I(\dot{\omega}, \omega) \cos 2w, \quad \dot{w} = \omega + (\dot{\omega}/2\omega) \sin 2w.$$

## §51 Natančnost ohranjanja adiabatske invariante

S pomočjo enačbe gibanja (50.10) lahko tudi drugače dokažemo, da je kanonska akcija adiabatska invarianta.

Funkcija  $S_0(q, I; \lambda)$  ni enolična funkcija spremenljivke  $q$ : ko koordinata doseže svojo začetno vrednost, se  $S_0$  poveča za večkratnik količine  $2\pi I$ . Odvod (50.9) pa je enolična funkcija, saj odvajamo pri konstantnem  $I$  in  $S_0$  se pri tem ne poveča. Funkcija  $\Lambda$  je, tako kot ostale enolične funkcije, periodična funkcija, če jo izrazimo s spremenljivko  $w$ . Povprečna vrednost po eni periodi odvoda  $\partial \Lambda / \partial w$  periodične funkcije je enaka nič. Povprečimo (50.10) tako, da  $\lambda$  smatramo kot konstanto (to smemo storiti, če se  $\lambda$  spreminja počasi). Dobimo

$$\bar{\dot{I}} = -\overline{(\partial \Lambda / \partial w)}_I \dot{\lambda} = 0, \quad (51.1)$$

kar smo želeli dokazati.

S pomočjo enačb (50.10) in (50.11) lahko obravnavamo natančnost, s katero se adiabatska invarianta ohranja. Nalogo lahko postavimo tako: naj ima parameter  $\lambda(t)$  konstantni limitni vrednosti  $\lambda_-$  in  $\lambda_+$  pri  $t \rightarrow -\infty$  in  $t \rightarrow +\infty$ ; pri dani začetni ( $t \rightarrow -\infty$ ) vrednosti  $I_-$  adiabatske invariante, poiščimo razliko  $\Delta I = I_+ - I_-$ , ko  $t \rightarrow +\infty$ .

Iz (50.10) dobimo

$$\Delta I = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Lambda}{\partial w} \dot{\lambda} \, dt. \quad (51.2)$$

Kot rečeno, je  $\Lambda$  periodična funkcija spremenljivke  $w$  s periodo  $2\pi$ ; razvijmo jo v Fourierovo vrsto

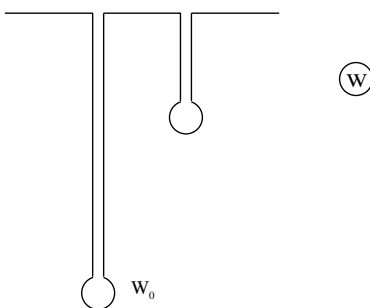
$$\Lambda = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{ilw} \Lambda_l. \quad (51.3)$$

Ker je  $\Lambda$  realen, za koeficiente velja  $\Lambda_{-l} = \Lambda_l^*$ . Zato je

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda}{\partial w} &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} ile^{ilw} \Lambda_l \\ &= 2\Re \sum_{l=1}^{\infty} ile^{ilw} \Lambda_l. \end{aligned} \quad (51.4)$$

Ko je  $\dot{\lambda}$  dovolj majhna količina, je odvod  $\dot{w}$  pozitiven (ima isti znak kot  $\omega$ , glej (50.11)), zato je  $w$  monotona funkcija časa  $t$ . Ko v (51.2) spremenimo integracijsko spremenljivko iz  $t$  v  $w$ , integracijske meje ostanejo enake:

$$\Delta I = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Lambda}{\partial w} \frac{d\lambda}{dt} \frac{dt}{dw} dw. \quad (51.5)$$



Slika 55:

Vstavimo (51.4). Dobljen integral lahko transformiramo, če  $w$  formalno smatramo kot kompleksno spremenljivko. Predpostavimo, da integrand nima singularnosti na realni osi in premaknemo integracijsko pot z realne osi v zgornjo polravnino kompleksne spremenljivke. Kontura se pri tem “ujame” na singularnostih integrala in okoli njih tvori zanke, kot je shematsko prikazano na sliki 55. Naj bo  $w_0$  singularnost, ki je najbližje realni osi, torej tista z najmanjšim (pozitivnim) imaginarnim delom. Glavni prispevek k integralu (51.5) dobimo iz okolice te točke in vsak člen iz vrste (51.4) prispeva člen s faktorjem  $\exp(-l\Im w_0)$ . Ponovno obdržimo le člen z najmanjšim negativnim eksponentom (torej člen z  $l = 1$ ), in dobimo \*

$$\Delta I \sim \exp(-\Im w_0). \quad (51.6)$$

Naj bo  $t_0$  (kompleksen) “trenutek”, ki ustreza singularnosti  $w_0$ :  $w(t_0) = w_0$ . V splošnem je  $|t_0|$  istega velikostnega reda kot karakteristični čas  $\tau$ , s katerim se spreminjajo parametri

\*V posebnih primerih se lahko pripeti, da razvoj (51.4) ne vključuje člena  $l = 1$  (glej na primer prvo nalogo v tem razdelku); v vsakem primeru moramo vzeti člen z najnižjo vrednostjo  $l$ , ki nastopa v vrsti.

sistema. \* Velikostni red eksponenta v (51.6) je

$$\Im w_0 \sim \omega \tau \sim \tau/T. \quad (51.7)$$

Ker smo predpostavili, da je  $\tau \gg T$ , je ta eksponent velik. Zato razlika  $I_+ - I_-$  eksponentno upada, če zmanjšujemo hitrost spreminjanja parametrov sistema. †

Določimo prvi približek k  $w_0$  glede na  $T/\tau$  (obdržimo torej le člen  $\sim (T/\tau)^{-1}$  v eksponentu). V enačbi (50.11) izpustimo majhen člen z  $\lambda$ :

$$dw/dt = \omega(I, \lambda(t)), \quad (51.8)$$

in predpostavimo, da ima argument  $I$  funkcije  $\omega(I, \lambda)$  konstantno vrednost, na primer  $I_-$ . Tedaj je

$$w_0 = \int^{t_0} \omega(I, \lambda(t)) dt; \quad (51.9)$$

kot spodnjo mejo si lahko izberemo poljubno realno vrednost  $t$ , ker to ne spremeni imaginarnega dela količine  $w_0$ . ‡

Integral (51.5) z  $w$  iz enačbe (51.8) in enim členom iz vrste (51.4) namesto  $\partial\Lambda/\partial w$  se glasi

$$\Delta I \sim \Re \int i e^{iw} \frac{\dot{\lambda} dw}{\omega(I, \lambda)}. \quad (51.10)$$

Od tod je razvidno, da so iskane singularnosti v bližini realne osi singularnosti (poli in točke razvejitve) funkcij  $\lambda(t)$  in  $1/\omega(t)$ . Poudariti moramo, da je  $\Delta I$  eksponentno majhen le tedaj, ko ti funkciji nimata singularnosti na realni osi.

## NALOGE

NALOGA 1. Ocení  $\Delta I$  za harmonsko nihalo s frekvenco, ki se počasi spreminja po enačbi

$$\omega^2 = \omega_0^2 \frac{1 + ae^{\alpha t}}{1 + e^{\alpha t}}$$

od  $\omega_- = \omega_0$  pri  $t = -\infty$  do  $\omega_+ = \sqrt{a}\omega_0$  pri  $t = \infty$  ( $a > 0$ ,  $\alpha \ll \omega_0$ ). §

Rešitev: Parameter  $\lambda$  naj bo frekvenca  $\omega$  sama. Velja

$$\frac{\ddot{\lambda}}{\omega} = \frac{1}{2}\alpha \left( \frac{a}{e^{-\alpha t} + a} - \frac{1}{e^{-\alpha t} + 1} \right).$$

Ta funkcija ima pola za  $e^{-\alpha t} = -1$  in  $e^{-\alpha t} = -a$ . Ko izračunamo integral  $\int \omega dt$ , ugotovimo, da dobimo najmanjšo vrednost količine  $\Im w_0$  zaradi enega izmed polov  $\alpha t_0 = -\log(-a)$ , in sicer znaša

$$\begin{aligned} \Im w_0 &= \omega_0 \pi / \alpha \quad \text{za } a > 1, \\ &= \omega_0 \pi \sqrt{a} / \alpha \quad \text{za } a < 1. \end{aligned}$$

\* Če počasnost spreminjanja parametra  $\lambda$  izrazimo z zahtevo, da je  $\lambda$  odvisna od časa  $t$  le preko zveze  $\xi = t/\tau$ , kjer je  $\tau$  velik, potem velja  $t_0 = \tau \xi_0$ , kjer je  $\xi_0$  singularnost funkcije  $\lambda(\xi)$ , ki ni odvisna od  $\tau$ .

† Opomnimo naj, da če sta začetna in končna vrednost  $\lambda(t)$  enaki  $\lambda_+ = \lambda_-$ , tedaj ni eksponentno majhna le razlika  $\Delta I$ , temveč tudi razlika  $\Delta E = E_+ - E_-$  končne in začetne energije; iz (49.9) izvemo, da je v tem primeru  $\Delta E = \omega \Delta I$ .

‡ Bolj natančen dokaz teh trditev in izračun koeficienta v eksponentu enačbe (51.6) lahko bralec najde v A. A. Slutskin, *Soviet Physics JETP*, **18**, 676, 1964.

§ Da se nihalo zares giblje harmonično se lahko prepričamo iz dejstva, da je frekvenca nihanja neodvisna od energije.

Za harmonsko nihalo je  $\Lambda \sim \sin 2w$  (glej nalogo v § 50), zato se vrsta (51.3) poenostavi na dva člena (z  $l = \pm 2$ ). Zato za harmonsko nihalo velja

$$\Delta I \sim \exp(-2\Im w_0).$$

NALOGA 2. Delec niha v potencialni jami. Kako njegova energija pojema pod vplivom sile trenja  $f_{\text{tr}} = -\alpha\dot{x}$  (kjer je  $x$  kartezična koordinata)?

Rešitev: Izračunamo povprečje enačbe (25.13) po nihajnem času in v prvem približku zanemarimo dušenje. Dobimo

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = -\alpha\bar{\dot{x}^2} = -\frac{\alpha}{T} \int_0^T \dot{x}^2 dt = -\frac{\alpha}{T} \oint \dot{x} dx = -\frac{2\pi\alpha}{mT} I(\bar{E}),$$

kjer je  $I(E)$  adiabatska invarianta in  $m$  masa delca. Nihajni čas  $T$  izrazimo z  $I$  s pomočjo enačbe (49.8),

$$\frac{dI}{d\bar{E}} \frac{d\bar{E}}{dt} = -\alpha I/m.$$

Po integraciji dobimo

$$I(\bar{E}) = I(E_0) \exp(-\alpha t/m).$$

S to enačbo je funkcija  $\bar{E}(t)$  implicitno določena. Za harmonsko nihalo postane enaka enačbi (25.5). Rešitev velja, če je izpolnjen pogoj  $\alpha T/m \ll 1$ .

## §52 Pogojno periodično gibanje

Obravnavajmo sistem s poljubnim številom prostostnih stopenj, ki se giblje tako, da vse koordinate ostajajo končne. Predpostavimo, da lahko vse spremenljivke separiramo po Hamilton-Jacobijevem postopku. To pomeni, da lahko z ustrezno izbranimi koordinatami okrajšano akcijo zapišemo v obliki

$$S_0 = \sum_i S_i(q_i), \quad (52.1)$$

torej kot vsoto funkciji, ki so odvisne vsaka le od ene same koordinate.

Posplošene gibalne količine so  $p_i = \partial S_0 / \partial q_i = dS_i / dq_i$ , zato lahko  $S_i$  zapišemo kot

$$S_i = \int p_i dq_i. \quad (52.2)$$

To so večlične funkcije. Ker je gibanje končno, ima vsaka koordinata omejen obseg spreminjanja. Ko  $q_i$  naredi en obhod po tem obsegu ("tja in nazaj"), se akcija poveča za

$$\Delta S_0 = \Delta S_i = 2\pi I_i, \quad (52.3)$$

kjer je

$$I_i \equiv \oint p_i dq_i / 2\pi. \quad (52.4)$$

Integrirati moramo po zgoraj omenjenem omejenem obsegu spreminjanja količine  $q_i$ . \*

---

\*Poudariti moramo, da pri tem mislimo formalno spreminjanje koordinate  $q_i$  po celotnem območju možnih vrednosti, ne pa spreminjanje med periodo dejanskega gibanja kot v primeru gibanja v eni dimenziji. Omejeno gibanje sistema z več prostostnimi stopnjami v splošnem ni periodično kot celota, poleg tega pa se niti posamezne koordinate običajno ne spreminjajo periodično (glej spodaj).



Sedaj opravimo kanonsko transformacijo podobno tisti iz §50 za eno samo prostostno stopnjo. Nove spremenljivke bodo “kanonske akcije”  $I_i$  in “kanonski koti”

$$w_i = \partial S_0(q, I) / \partial I_i = \sum_k \partial S_k(q_k, I) / \partial I_i, \quad (52.5)$$

tvorilka pa je ponovno akcija, izražena kot funkcija koordinat in količin  $I_i$ . Enačbe gibanja v teh koordinatah so  $\dot{I}_i = 0$ ,  $\dot{w}_i = \partial E(I) / \partial I_i$ , od koder sledi

$$I_i = \text{konstanta}, \quad (52.6)$$

$$w_i = [\partial E(I) / \partial I_i] t + \text{konstanta}. \quad (52.7)$$

Po analogiji z izpeljavo enačbe (50.7) lahko ugotovimo, da sprememba “tja in nazaj” koordinate  $q_i$  ustreza spremembi kota  $w_i$  za  $2\pi$ :

$$\Delta w_i = 2\pi. \quad (52.8)$$

Količine  $w_i(q, I)$  so večlične funkcije koordinat: ko se koordinate spreminjajo in končno dosežejo svoje začetne vrednosti, se količine  $w_i$  lahko spremenijo za poljuben večkratnik števila  $2\pi$ . To lastnost lahko formuliramo tudi kot lastnost funkcij  $w_i(p, q)$ , izraženih s koordinatami in gibalnimi količinami, v faznem prostoru sistema. Akcije  $I_i$ , izražene z  $p$  in  $q$ , so enolične funkcije. Ko vstavimo  $I_i(p, q)$  v  $w_i(q, I)$  dobimo funkcijo  $w_i(p, q)$ , ki se lahko spremeni za poljubni večkratnik števila  $2\pi$  (vključno z nič), ko naredimo poljubno sklenjeno pot v faznem prostoru.

Od tod sledi, da je poljubna enolična funkcija  $* F(p, q)$  stanja sistema, če jo izrazimo s kanonskimi spremenljivkami, periodična funkcija kanonskih kotov, njena perioda za vsako izmed spremenljivk pa je  $2\pi$ . Razvijemo jo lahko v večkratno Fourierovo vrsto:

$$F = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{l_s=-\infty}^{\infty} A_{l_1 l_2 \dots l_s} \exp [i(l_1 \omega_1 + \dots + l_s \omega_s)],$$

kjer so  $l_1, l_2, \dots, l_s$  cela števila. Vstavimo kanonske kote kot funkcije časa in dobimo časovno odvisnost funkcije  $F$  kot vsoto oblike

$$F = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{l_s=-\infty}^{\infty} A_{l_1 l_2 \dots l_s} \exp \left\{ it \left( l_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} + \dots + l_s \frac{\partial E}{\partial I_s} \right) \right\}. \quad (52.9)$$

Vsak izmed členov te vrste je periodična funkcija časa s frekvenco

$$l_1 \omega_1 + \dots + l_s \omega_s, \quad (52.10)$$

ki je vsota celoštevilskih večkratnikov osnovnih frekvenc

$$\omega_i = \partial E / \partial I_i. \quad (52.11)$$

---

\*Vrtilne koordinate  $\phi$  (glej drugo opombo v § 49) niso enolično povezane s stanjem sistema, ker je položaj enak pri vseh vrednostih  $\phi$ , ki se razlikujejo za večkratnik števila  $2\pi$ . Če so med koordinatami  $q$  takšni koti, lahko ti v funkciji  $F(p, q)$  nastopajo le preko izrazov, kot so  $\cos \phi$  in  $\sin \phi$ , ki so enolično povezani s stanjem sistema.

Ker frekvence (52.10) v splošnem niso komenzurabilne, vsota sama ni periodična funkcija, kot to tudi niso koordinate  $q$  in gibalne količine  $p$  sistema.

Zato gibanje sistema v splošnem ni povsem periodično niti v celoti, niti v posameznih spremenljivkah. To pomeni, da se sistem v končnem času ne povrne v neko poljubno izbrano začetno stanje. Lahko pa rečemo, da se po zadostno dolgem času sistem vrne poljubno blizu začetnemu stanju. Zato takšno gibanje imenujemo *pogojno periodično*.

V nekaterih posebnih primerih sta dve (ali več) osnovni frekvenci  $\omega_i$  komenzurabilni za poljubne vrednosti  $I_i$ . To imenujemo *degeneriranost*, če pa je komenzurabilnih vseh  $s$  frekvenc, potem je gibanje sistema *popolnoma degenerirano*. V zadnjem primeru je gibanje očitno periodično in pot sistema je zaključena.

Degeneriranost vodi k manjšemu številu neodvisnih količin  $I_i$ , od katerih je odvisna energija sistema. Če za dve frekvenci velja

$$n_1 \partial E / \partial I_1 = n_2 \partial E / \partial I_2, \quad (52.12)$$

kjer sta  $n_1$  in  $n_2$  celi števili, potem  $I_1$  in  $I_2$  nastopata v izrazu za energijo samo kot vsota  $n_2 I_1 + n_1 I_2$ .

Pomembna lastnost degeneriranega gibanja je večje število enoličnih integralov gibanja v primerjavi s tem številom za nedegeneriran primer z enakim številom prostostnih stopenj. V splošnem primeru je namreč izmed  $2s - 1$  integralov gibanja samo  $s$  funkcij stanja enoličnih; to so lahko na primer akcije  $I_i$ , ki jih je  $s$ . Ostalih  $s - 1$  integralov gibanja lahko zapišemo kot razlike

$$w_i \partial E / \partial I_k - w_k \partial E / \partial I_i. \quad (52.13)$$

Konstantnost teh količin sledi iz enačbe (52.7), toda to niso enolične funkcije stanja sistema, saj kanonski koti niso enolični.

Ko imamo opravka z degeneriranostjo, pa so razmere drugačne. Enačba (52.12) pomeni, da količina

$$w_1 n_2 - w_2 n_1 \quad (52.14)$$

sicer ni enolična, je pa "enolična" do poljubnega celega mnogokratnika  $2\pi$  natančno. Zato lahko izberemo trigonometrično funkcijo te količine, da dobimo dodatni integral gibanja.

Poseben primer degeneriranosti je gibanje v potencialu  $U = -\alpha/r$ . Zaradi degeneriranosti obstaja posebni dodatni integral gibanja za to polje (15.17) poleg običajnih dveh enoličnih integralov (ker je gibanje dvodimenzionalno), vrtilne količine  $M$  in energije  $E$ , ki se ohranjata za poljubno gibanje v centralno simetričnem polju.

Obstoj dodatnih enoličnih integralov gibanja vodi k posebni lastnosti degeneriranih gibanj: omogočajo namreč popolno separacijo spremenljivk ne le za eno \*, temveč za več različnih izbir koordinat. Količine  $I_i$  so enolični integrali gibanja v koordinatah, s katerimi lahko separiramo spremenljivke. V primeru degeneriranost je število enoličnih integralov večje od  $s$ , tako da obstaja več različnih izbir kanonskih akcij  $I_i$ .

Kot primer lahko ponovno izpostavimo Keplerjevo gibanje, kjer je separacija spremenljivk mogoča tako v sferičnih kot v parabolčnih koordinatah.

V 49 smo pokazali, da je kanonska akcija za končno gibanje v eni dimenziji adiabatska invarianta. Ta trditev velja tudi za sisteme z večjim številom prostostnih stopenj, kar lahko dokažemo s posplošitvijo postopka na začetku 51.

\*Pri tem zanemarimo trivialne spremembe koordinat, ko na primer  $q_1' = q_1'(q_1)$ ,  $q_2' = q_2'(q_2)$ .

V večdimenzionalnem primeru s spremenljivim parametrom  $\lambda(t)$  so enačbe gibanja v kanonskih spremenljivkah, ki opisujejo spreminjanje kanonskih akcij  $I_i$ , analogne enačbi (50.10):

$$\dot{I}_i = -\frac{\partial \Lambda}{\partial w_i} \dot{\lambda}, \quad (52.15)$$

kjer je, kot poprej,  $\Lambda = (\partial S_0 / \partial \lambda)_I$ . Povprečje moramo izračunati po času, ki je velik v primerjavi z osnovnimi periodami sistema in majhen v primerjavi s časovno skalo, na kateri se spreminja  $\lambda(t)$ . Količine  $\dot{\lambda}$  ne povprečimo, povprečja odvodov  $\partial \Lambda / \partial w_i$  pa izračunamo tako, kot da bi se gibanje odvijalo pri konstantnem  $\lambda$ , kot pogojno periodično gibanje. Teda je  $\Lambda$  enolična periodična funkcija kanonskih kotov  $w_i$  in povprečna vrednost odvodov  $\partial \Lambda / \partial w_i$  je enaka nič.

Pred koncem si lahko na kratko ogledamo še lastnosti končnega gibanja izoliranega sistema z  $s$  prostostnimi stopnjami v povsem splošnem primeru, ko spremenljivk v Hamilton-Jacobijevi enačbi ne moremo ločiti.

Osnovna lastnost sistemov z ločljivimi spremenljivkami je enoličnost integralov gibanja  $I_i$ , katerih število je enako številu prostostnih stopenj. V splošnem primeru, ko spremenljivk ne moremo ločiti, so enolični integrali gibanja le tisti, katerih konstantnost je posledica homogenosti in izotropnosti prostora in časa, to so energija, gibalna količina in vrtilna količina.

Fazna pot sistema poteka skozi območja prostora, ki so določena z izbranimi konstantnimi vrednostmi enoličnih integralov gibanja. Za sistem z ločljivimi spremenljivkami in  $s$  enoličnimi integrali je to območje  $s$  dimenzionalna mnogoterost v faznem prostoru. V zadosti dolgem času se sistem poljubno približa vsaki točki na tej hiperploskvi.

Sistem, pri katerem spremenljivk ne moremo ločiti, ima manj kot  $s$  enoličnih integralov in fazna pot (povsem ali le delno) zaseda mnogoterost z več kot  $s$  dimenzijami v faznem prostoru.

Po drugi strani pa je v degeneriranih sistemih število integralov večje od  $s$ , fazna pot pa poteka po manj kot  $s$  dimenzionalni mnogoterosti.

Če se Hamiltonova funkcija sistema razlikuje le za majhne člene od takšne funkcije, ki omogoča separacijo spremenljivk, tedaj so lastnosti gibanja podobne tistim pri pogojno periodičnem gibanju in se razlikujejo za manj, kot so veliki dodatni majhni členi v Hamiltonovi funkciji.

## NALOGA

NALOGA Izračunaj kanonski akciji eliptičnega gibanja v polju  $U = -\alpha/r$ .

Rešitev: S polarnima koordinatama  $r, \phi$  v ravnini gibanja lahko zapišemo

$$\begin{aligned} I_\phi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_\phi d\phi = M, \\ I_r &= 2 \frac{1}{2\pi} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{M^2}{r^2}} dr \\ &= -M + \alpha \sqrt{m/2|E|}. \end{aligned}$$

Zato je energija, zapisana s kanonskima akcijama, enaka  $E = -m\alpha^2/2(I_r + I_\phi)^2$ . Odvisna je le od vsote  $I_r + I_\phi$ , zato je gibanje degenerirano; obe osnovni frekvenci (za  $r$  in  $\phi$ ) sta enaki.

Parametra orbite  $o$  in  $e$  (glej (15.4)) sta z  $I_r$  in  $I_\phi$  povezani z zvezama

$$p = \frac{I_\phi^2}{m\alpha}, \quad e^2 = 1 - \left( \frac{I_\phi}{I_\phi + I_r} \right)^2.$$

Ker sta  $I_r$  in  $I_\phi$  adiabatni invarianti, se ob počasnih spremembah koeficienta  $\alpha$  ali mase  $m$  ekscentričnost orbite ne spreminja, njena velikost pa se spreminja obratno sorazmerno z  $\alpha$  in z  $m$ .